తెలుగు అకాడమి ప్రచురణ - 72
బి.ఎస్‌సి. & బి.ఎ.-గణితశాస్త్రం



అవకలన జ్యామితి

తృతీయ సంవత్సరం

ఉమ్మడి పాఠ్యప్రణాళిక ప్రకారం

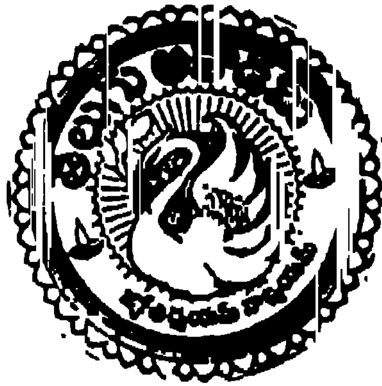
రచయితలు

డా. కె. కేశవరావు, ఎం.ఏ., పిహెచ్.డి.
రీడర్, గణితశాస్త్రశాఖ
శ్రీ అనంత పద్మనాభ కళాశాల, వికారాబాద్.

ఆచార్య యమ్. సీతాలక్ష్మి, ఎం.ఎస్‌సి., పిహెచ్.డి.
గణితశాస్త్రశాఖ
ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాదు.

సంపాదకులు

ఆచార్య మల్యాల లక్ష్మీనారాయణరావు, ఎమ్.ఎ., పిహెచ్.డి.
రిటైర్డ్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రశాఖ
ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాదు.



తెలుగు అకాడమి
హైదరాబాదు
1997

B.Sc. ; B.A. : avakalana jyaamithi (Differential Geometry); **Authors:** Dr. K. Kesavarao, Prof. M. Sitalakshmi; **Editor:** Prof. M.L.Narayanarao. First Edition: 1997; pp. viii+252+4.

First Edition, 1997
Copies : 1,000

Published by TELUGU AKADEMI, Hyderabad-500 029 (Andhra Pradesh) under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and Literature in Regional Languages at the University level in the Ministry of Human Resource Development, Government of India, New Delhi.

Price : Rs. 45=00 .

Printed in India
Laser Typeset at M/s Speed Print, Vijayawada
Printed at M/s Planographers, Hyderabad,
Andhra Pradesh.

భూమిక

1968లో స్థాపన జరిగిన నాటి నుంచి ఉన్నత స్థాయిలో బోధనాభాషగా తెలుగు కుదురుకొనడంలో తెలుగు అకాడమి నిర్వహిస్తున్న పాత్ర అందరికి విశదమైందే. ఎన్నో రకాల ఇబ్బందులను అధిగమిస్తూ అత్యల్ప వ్యవధిలో ఇంటర్, డిగ్రీ, పి.జి. స్థాయిలకు కావలసిన పాఠ్యగ్రంథాలు; అనుబంధ గ్రంథాలుగా అనువాదాలు, మోనోగ్రాఫ్‌లు, జనరంజక గ్రంథాలు, వ్యాసావళులు, కరదీపికలు; ఎంసెట్, ఐ.ఐ.టి., టి.టి.ఐ. మొదలయిన పోటీ పరీక్షలకు కావలసిన గ్రంథాలు; పారిభాషిక పదకోశాలు; శాస్త్ర నిఘంటువులు మొదలయినవాటిని ప్రచురించి అకాడమి విద్యారంగానికి సముచితమయిన సేవ చేయగలిగింది. అకాడమి ప్రచురణలు ఎన్నో పునర్ముద్రణలు కూడా పొందాయి.

1993లో రాష్ట్ర ఉన్నత విద్యామండలివారు రాష్ట్రంలోని వివిధ విశ్వవిద్యాలయాల ఆచార్యులు, అధ్యాపకుల సహకారంతో పాఠ్యప్రణాళికలను ప్రస్తుత సమాజ అవసరాలకు ఉపయోగపడేవిధంగా నవీకరించారు. ఈ నేపథ్యంలో నవీకరించిన ఉమ్మడి పాఠ్యప్రణాళిక ప్రకారం వివిధ శాస్త్రాలలో డిగ్రీ ప్రథమ, ద్వితీయ, తృతీయ సంవత్సరాలకు కావలసిన పాఠ్యగ్రంథాల తయారీ అకాడమి చేపట్టింది.

నవీకరించిన ఉమ్మడి పాఠ్యప్రణాళిక ప్రకారం డిగ్రీ స్థాయి విద్యార్థులకోసం ఈ గ్రంథం ప్రచురించడం జరిగింది. దీన్ని ప్రామాణిక గ్రంథంగా తీర్చిదిద్దడానికి సంపాదక, రచయితలు విశేషంగా శ్రమించారు. ఇంకా సమగ్రంగా తీర్చిదిద్దడానికి సహృదయ పాఠకులు సూచనలిస్తే కృతజ్ఞతతో స్వీకరించగలము.

ప్రవేశిక

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వ నిర్ణయం మేరకు 1987 వ సంవత్సరం నుంచి రాష్ట్రంలోని డిగ్రీ స్థాయి విద్యార్థులందరికి ఒకే పాఠ్య ప్రణాళిక ప్రవేశపెట్టడం జరిగింది.

వివిధ విశ్వవిద్యాలయాలలో బి.యస్‌సి.; బి.ఏ. తృతీయ సంవత్సరం గణితశాస్త్రి పాఠ్యాంశంలో "అవకలన జ్యామితి" ఒక ఐచ్ఛిక పేపరు.

మొదటి అధ్యాయంలో "సదిశలు-అవకలన జ్యామితిలో వాటి ఉపయోగాలు" వివరించడమైంది.

తరవాత రెండు అధ్యాయాలలో స్పర్శరేఖలు, ప్రధాన అభిలంబరేఖలు, ఉపాభిలంబరేఖలు, వక్రత, విమోటనాలు- వివిధ వక్రాల దృష్ట్యా చర్చించడం జరిగింది.

చివరి అధ్యాయాలలో మౌలిక రూపాలు, వెయిన్‌గార్టెను సమీకరణాలు, తలాలలోని వక్రాల గురించి లంబఛేదనము, అభిలంబ వక్రత, మ్యూనర్ సిద్ధాంతము, కనిష్ఠ తలాల గురించి, సంయుగ్మ దిశలు అనంత స్పర్శరేఖలు గురించి చర్చించాం.

ప్రతి అధ్యాయంలో తగినన్ని సమస్యలకు సాధనలిచ్చాం. అధ్యాయాలకు చివర కొన్ని సమస్యలిచ్చాం. సదిశలను సూచించేటప్పుడు ముద్ద అక్షరాలను లేదా అక్షరాలపై బాణం గుర్తులనువాడాం.

సహృదయ పాఠకులు ఇచ్చే నిర్మాణాత్మక సలహాలను కృతజ్ఞతలతో స్వీకరించి పునర్ముద్రణలో పొందుపరచడం జరుగుతుంది.

విషయసూచిక

సదిశలు – త్రిపరిమాణ జ్యామితి

సదిశాంతరాశము, త్రిపరిమాణ జ్యామితులలో ఈ క్రింది ఫలితాల గురించి తెలిసికొన్నారు. వాటి ఉపయోగము అవకలన జ్యామితిలో ఉన్నందున ఇక్కడ సూచించడము జరిగినది. అవకలన జ్యామితి అనేది గణిత శాస్త్రము యొక్క ఒక శాఖ. ఇందులో వక్రాలు, ఉపరితలాల గురించి అవకలన గణితాన్ని ఉపయోగించి చర్చిస్తాం.

సాధారణంగా త్రిపరిమాణ రేఖాగణితంలో సమగ్ర ఫలితాలకు త్వరిత పద్ధతిగ సదిశల నుపయోగిస్తూ సందర్భాను సారంగా ఇతర పద్ధతులలో (కార్టీజియన్ నిరూపకాలలో లేదా పరామితుల నుపయోగించి లేక ధృవ నిరూపకాలలో) ఆ ఫలితాలను పోల్చి చూస్తాం.

(అ) సదిశాంతరాశము :

1.1 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = [\mathbf{a\,b\,c}] = [\mathbf{b\,c\,a}] = \ldots = -[\mathbf{b\,a\,c}] = \ldots$

1.1.1 $[\mathbf{a\,b\,c}] = 0$ అయితే a, b, c లు సతలీయ సదిశలు లేదా

వాటిలో రెండు సమాంతరము.

1.2 $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$ [ఇది **b, c** లలో వ్యక్తపరచబడినది.

$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{v} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}$ ఇది **b, a** లలో వ్యక్తపరచబడినది.

కనుక $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$]

1.3 $\mathbf{f}(s) = f_1(s)\,\mathbf{i} + f_2(s)\,\mathbf{j} + f_3(s)\,\mathbf{k}$ అయితే

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{f}'(s) = \underset{\delta s \to 0}{Lt}\frac{\delta \mathbf{f}}{\delta s} \text{ లేదా } \frac{df_1}{ds}\mathbf{i} + \frac{df_2}{ds}\mathbf{j} + \frac{df_3}{ds}\mathbf{k}$$

1.3.1 $(f\cdot g)' = f\cdot g' + f_1\cdot g$ లేదా $g'\cdot f + f'\cdot g$

1.3.2 $(f\wedge g)' = f\wedge g' + f'\wedge g$

1.3.3 $[fgh]' = [f'gh] + [fg'h] + [fgh']$

1.3.4 $\{f \wedge (g \wedge h)\}' = \{f' \wedge (g \wedge h)\} + \{f \wedge (g' \wedge h)\} + \{f \wedge (g \wedge h')\}$

1.3.5 $(\phi f)' = \phi f' + \phi' f$

సూచన : ఈ ప్రమేయాలు వక్ర చాపము s అనే పరామితిని బట్టి ... పరామితులు ఉండిన $\frac{d}{ds}$ (= ') బదులు $\frac{d}{dr}, \frac{\delta}{\delta s}$ వంటివి రాయాలి.

1.3.6 $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{c}[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}] - \mathbf{d}[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ లేదా $\mathbf{b}[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}] - \mathbf{a}[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]$

1.3.7 $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

1.4 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ అయితే $(a^2)' = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}'$.

1.5 నెబ్లా (డెల్) $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ అయిన

1.5.1 ఉత్పాలము = grad $\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \theta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$

1.5.2 అపసరణ = div $\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$

1.5.3 అంక cal. $\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$

1.5.4 ఒక అదిశ ప్రమేయము యొక్క ఉత్పాలము శూన్యమయితే అది స్థిర ప్రమేయము ...

1.5.5 ఒక సదిశ యొక్క అపసరణ శూన్యమయితే అది సొలినాయిడల్ సదిశ.

1.5.6 ఒక సదిశ యొక్క అంక శూన్యమయితే అది భ్రమణ రహిత సదిశ.

1.5.7 div (grad ϕ) = $\nabla^2 \phi$, ∇^2 ను లాప్లాషియన్ కారకము అంటారు.

1.5.8 curl (grad ϕ) = 0,

1.5.9 div curl $\vec{v} = 0$,

1.5.10 curl curl $\vec{v}$ = grad div $\vec{v} - \nabla^2 \vec{v}$

(ఆ) త్రిపరిమాణ జ్యామితి :

1. $\phi(x, y, z) = c$ అనే తలానికి స్పర్శతలము, అభిలంబరేఖలు :

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ అనేది ఉపరితలముపై కల చలన బిందువు అయితే $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$

ఆ బిందువు వద్ద ఉపరితలానికి గీసిన స్పర్శతలంలో ఉంటుంది. ఇంకా $d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ $(dx, dy, dz) = 0$. కనక $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ ఆ ఉపరితలానికి గీసిన అభిలంబరేఖ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులను సూచిస్తాయి.

2. సమతలము (మొదటి తరగతి ఉపరితలము)

1.6.1 $\mathbf{n}$ సమతలానికి గీసిన అభి లంబరేఖ అయిన $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = p$ సమతలమున సూచిస్తుంది.

1.6.2 $\mathbf{n}$ అభి లంబరేఖ కలిగిన సమతలము $\mathbf{a}$ ద్వారా పోయినచో దాని సమీకరణము

$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$ అవుతుంది.

1.6.3 సరేఖీయము కాని మూడు బిందువులు $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ల ద్వారా పోవు సమతల సమీకరణము

$[\mathbf{r} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] = 0$ అవుతుంది.

దీనిని $\mathbf{r} = (1 - s - t)\,\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ గా కాని

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t\,(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ గా కాని రాయవచ్చు.

1.6.4 $\mathbf{c}$ ద్వారాపోతూ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ లకు సమాంతరముగ కల సమతల సమీకరణము

$\mathbf{r} = \mathbf{c} + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ అవుతుంది.

1.6.5 నాలుగు బిందువులు $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ లు సతలీయములవటానికి నియమము

$l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} + p\mathbf{d} = \bar{\mathbf{0}} \ni l + m + n + p = 0$

1.6.6 ఒక సదిశ $\mathbf{r}$ సరేఖీయముకాని సదిశలు $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ లతో సతలీయము అయితే

$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ అయ్యేటట్లు x, y లు ఏకైకం.

(3) సరళరేఖ :

1.7.1 $\mathbf{a}$ ద్వారాపోతూ $\mathbf{b}$ కి సమాంతరముగ కల సరళరేఖ సమీకరణము

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ అవుతుంది

1.7.2 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ల ద్వారాపోవు సరళరేఖ సమీకరణము $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ లేదా

$\mathbf{r} = (1-t)\,\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ అవుతుంది. ఇచ్చట పరామితి t, వాస్తవ సంఖ్య విలువలన్నిటిని తీసుకొంటుంది.

1.7.3 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ లు సరేఖీయములయితే $l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = 0$; $l + m + n = 0$ అగునట్లు వాస్తవ సంఖ్యలు l, m, n ఉంటాయి.

(4) అల్పతమ దూరము :

$\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 + t\mathbf{b}_1, \mathbf{r} = \mathbf{a}_2 + s\mathbf{b}_2$ ల మధ్య అల్పతమ దూరము

$\dfrac{[\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]}{|\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2|}$ అవుతుంది. మరియు ఈ రేఖ సమీకరణము అవుతుంది మరియు

ఈ రేఖ సమీకరణము

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}_1) \cdot [\mathbf{b}_1 \wedge (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)] = 0 = (\mathbf{r} - \mathbf{a}_2)\left(\mathbf{b}_2 \wedge (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2)\right)$$ అవుతుంది.

2.

అంతరాళంలోని వక్రాలు

2.1 అవకలన జ్యామితి :

గణిత శాస్త్రములోని ఈ శాఖ పేరుకు తగినట్లు (అవ)కలన గణితము సహాయముతో సాధించు జ్యామితీయ సమస్యలను కలిగి ఉంటుంది. దీనిలో అంతరాళములోని వక్రాల, ఉపరితలాల జ్యామితీయలక్షణాలను చర్చిస్తాము. ఈ లక్షణములు ఎప్పుడూ మారుతూఉంటాయి. కనక ఏదైన ఒక బిందువు యొక్క ఎంచుకున్న సామీప్యములో వక్రముల, ఉపరితలాల ధర్మాలను పరిశీలిస్తాము. అంటే జ్యామితీయ ఆకృతుల అతి చిన్న శకలాల పరిశీలన జరుగుతుంది. దీనిలో జ్యామితీయ ఆకృతి యొక్క లఘు (స్థానిక) పరిశీలన సాధ్యమవుతుంది. జ్యామితీయ ఆకృతి మొత్తానికి సంబంధించని ధర్మములను స్థానిక ధర్మములు అంటాము. ఉదా : వక్రత. ఈ ధర్మాలు వక్రముపైకల ఒక బిందు సామీప్యముపై మాత్రమే ఆధారపడి ఉంటాయి. మొత్తము ఆకృతికి వర్తించే ధర్మాములను సార్వత్రిక (స్థూల) ధర్మాలంటాము.

త్రిపరిమాణ యూక్లిడియన్ అంతరాళము E_3 లో చలన బిందువు P యొక్క ఉనికి ఏకపరామితీయ ప్రమేయము ద్వారా తెలియ చేయబడితే ఆ చలన బిందువు ఒక వక్రము C ని సూచిస్తుంది. కనక వక్ర సమీకరణము

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad \text{——— (1)}$$

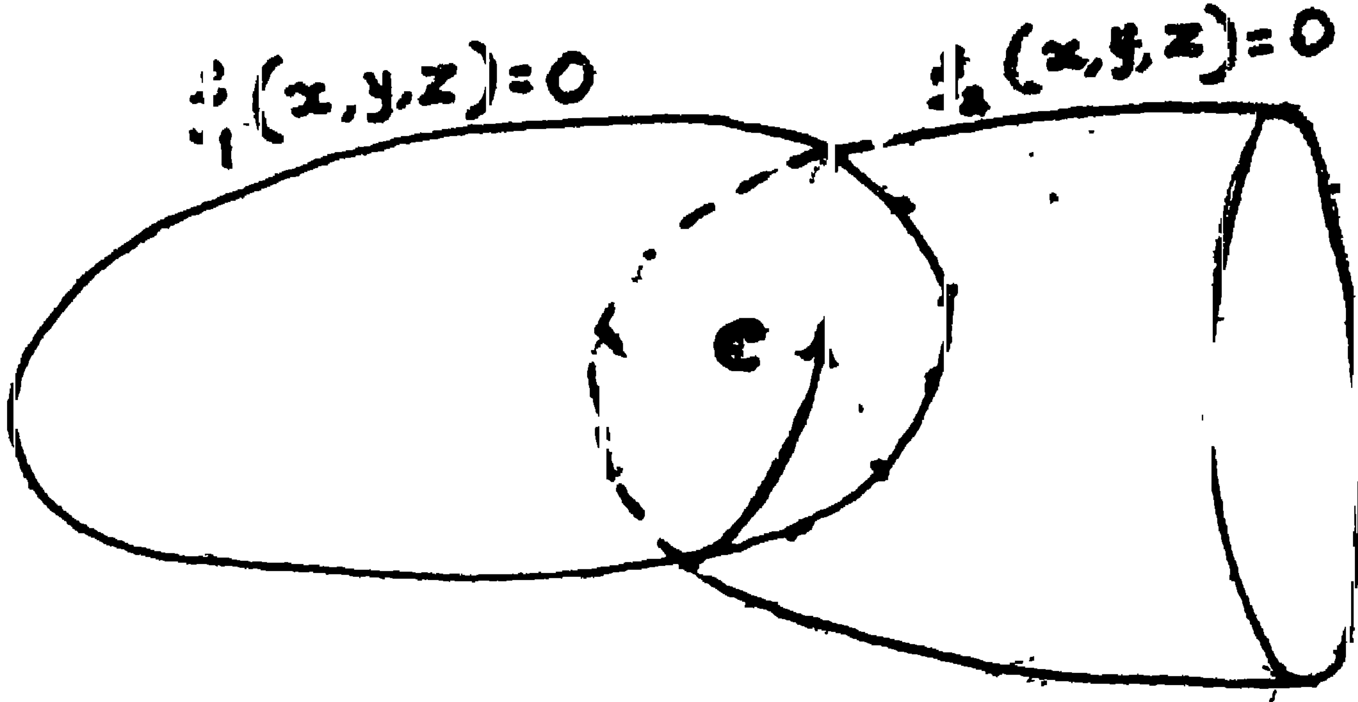
అవుతుంది.

ఈ వక్రము C ని రెండు ఉపరితలముల ఛేదన వక్రముగ, అంటే

$$f_1(x, y, z) = 0 \;;\; f_2(x, y, z) = 0 \qquad \text{——— (2)}$$

గ కూడ రాయవచ్చును.

వక్రము యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు $x = x(r), y = y(r), z = z(r)$ ల నుండి పరామితి (r) ని తొలగించిన రెండు సమీకరణములు (2) ను పోలినవి వస్తాయి.



పటము 2.1

2.2 n వ తరగతి ప్రమేయాలు – వక్రాలు :

ఒక వాస్తవ అంతరము I లో నిర్వచింపబడిన వాస్తవమూల్య ప్రమేయము f కు n వ పరిమాణపు అవకలజాలు వక్రచాపము (s) దృష్ట్యా చేసే అవకలనాన్ని ($'$) తోను పరామితి (r) దృష్ట్యా చేసే అవకలనాన్ని ($\cdot$) తోను సూచిస్తాము I యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద వ్యవస్థితమై మరియు అవిచ్ఛిన్నము అయితే ఆ ప్రమేయాన్ని *n–వ తరగతి* ప్రమేయం అంటాము. దీనిని C^n చే సూచిస్తాము. ఇదే విధంగా C^∞ కూడ నిర్వచింపబడుతుంది.

ఒక సదిశ ప్రమేయము $R = (X, Y, Z)$ అంతరము I లో నిర్వచింపబడిన C^n ప్రమేయము అయితే దీని ఘటక ప్రమేయాలు కూడ C^n ప్రమేయాలు అవుతాయి. I పై $\frac{dR}{dr} \neq 0$ అయితే **R** ను క్రమప్రమేయము అంటాము. n–వ తరగతి క్రమ సదిశ ప్రమేయము *n వ తరగతి పథము*ను సూచిస్తుంది.

ఒకే తరగతి n కు చెందిన రెండు పథాలు R_1, R_2 లు I_1, I_2 లపై నిర్వచింపబడిన I_1 నుండి I_2 కు శుద్ధ ఆరోహణ సంగ్రస్త C^n ప్రమేయము ψ $R_1 = R_2 0 \psi$ అయేటట్లు వ్యవస్థితమయితే R_1, R_2 లను తుల్యపథాలు అంటాము. ఘటక రూపములో ఈ నియమము

రూపములో ఉంటుంది. దీనిని ఉపరితలము యొక్క అంతర్లీన లేదా కన్‌స్ట్రెయింట్ (Constraint) సమీకరణము అంటాము. సమీకరణము (1) ని (3) రూపంలో రాయటానికి కేవలము u, v లను తొలగిస్తే సరిపోదు. $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$ యొక్క కోటి 2 ఉండాలి.

సమీకరణము (3) ను

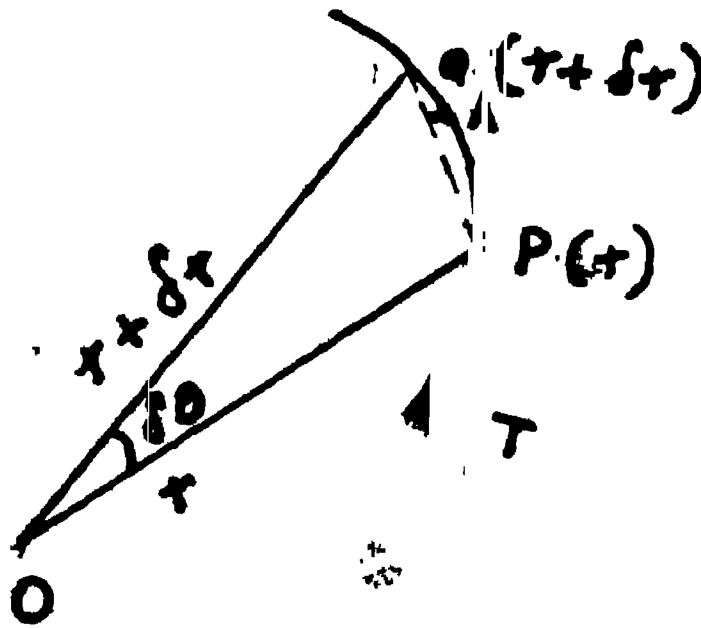
$$z = f(x, y) \qquad \text{—— (4)}$$

రూపంలో రాయగలిగితే ఈ సమీకరణము ఉపరితలము యొక్క మోంగెరూపము అనబడుతుంది.

2.4 వక్రమునకు ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ :

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ అనువక్రముపై P(t), Q(r + δr) లు రెండు సామీప్య బిందువులయిన

$$PQ = OQ - OP \Rightarrow \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(r + \delta t) - \mathbf{r}(r) \Rightarrow \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta v} = \frac{\mathbf{r}(r + \delta r) - \mathbf{r}(r)}{\delta t}$$



పటము 2.2

Pవద్ద స్పర్శరేఖను Q → P అయినప్పుడు జ్యా PQ గ నిర్వచిస్తాం కనక

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t)}{\delta t}$ P→P వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖకు సమాంతరము అవుతుంది.

కనక P(r) వద్ద వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖా సమీకరణము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{r}$ అవుతుంది.

కార్టీజియన్ నిరూపకాలలో ఈ సమీకరణము $(X, Y, Z) - (z, y, z) = u(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$$\text{లేక } \frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}} \text{ అవుతుంది.}$$

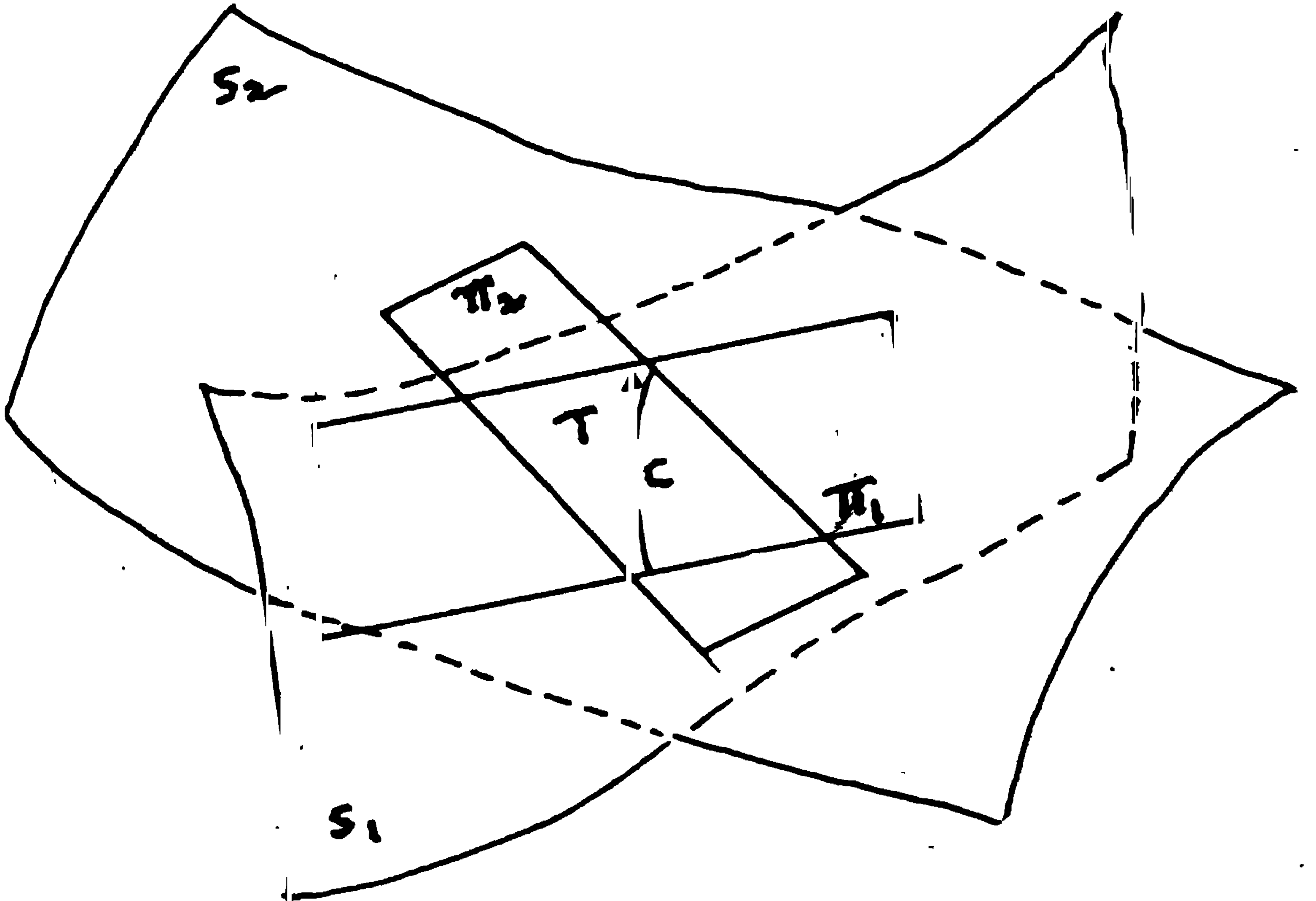
$$\text{యూనిట్ స్పర్శరేఖ } \hat{t} = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} \text{ లేక } \overline{r}' \text{ అవుతుంది.}$$

$f(x, y, z) = 0,\ g(x, y, z) = 0$ అనే ఉపరితలాల ఛేదన వక్రానికి

$$\Delta f.\mathbf{r} = 0,\ \Delta g.\mathbf{r} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \ ||\ \Delta f \wedge \Delta g\ ||\ \text{స్పర్శరేఖ}$$

$$\Rightarrow \Delta f \wedge \Delta g = \lambda \dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right)$$



పటము 2.3

సూచన :

1. దత్త వక్రానికి దత్తబిందువు వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు తెలిసినవి కనక స్పర్శరేఖ సమీకరణము రాయవచ్చును.
2. r స్పర్శరేఖకు సమాంతరము కనక $\Delta f, \Delta g$ లు ఆ ఉపరితలాలకు గీసిన అభిలంబరేఖల దిక్ నిష్పత్తులను సూచిస్తాయి.
3. రెండు తలాల ఛేదన వక్రానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ ఆ తలాలకు ఆబిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శతలాల ఛేదనరేఖ అవుతుంది.

ఉదా 1 : $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = c\theta$ అనే కుండలినికి $(0), \left(\frac{\pi}{2}\right)$ ల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖలను కనుక్కోండి.

$P(\theta)$ వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖా సమీకరణం

$\frac{x - a\cos\theta}{-a\sin\theta} = \frac{y - a\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{z - c\theta}{c}$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము అవుతుంది

$\therefore$ $P(0)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$\frac{x - a}{0} = \frac{y - 0}{a} = \frac{z}{c}$; $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$\frac{x - 0}{-a} = \frac{y - a}{0} = \frac{z - c\frac{\pi}{2}}{c}$ అవుతాయి.

ఉదా 2 : $f : y - x^2 = 0,\ g : z - x^3 = 0$ ల ఛేదన వక్రానికి P వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణాలను రాయండి.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0\ ;\ \frac{\partial g}{\partial x} = -3x^2,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial g}{\partial z} = 1$$

కావున $P(x, y, z)$ వద్ద ఛేదన వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు

$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{2x} = \frac{Z - z}{3x^2}$ అవుతాయి.

ఉదా 3 : $x^2 - y = 0,\ xz - y^2 = 0$ అనే ఉపరితలాలతో $x = 0 = y$ అంటే $z -$ అక్షము మాత్రమే కాక $x = u,\ y = u^2,\ z = u^3\ (-\infty < u < \infty)$ వెంట ఇతర వక్రాలు కూడా ఖండింపబడుతాయి.

2.5 స్పర్శ పరిమాణము :

అంతరాళములో ఒక వక్రము C, ఉపరితలము S లకు (ఇచ్చట వక్రము బదులు ఉపరితలము, ఉపరితలము బదులు వక్రము కూడ తీసికొనవచ్చును.) ఒక క్రమబిందువు A ఉమ్మడి బిందువు అవుతూ C పై A యొక్క సమీపబిందువు P, S నుండి δ = (PN) దూరములో ఉన్నప్పుడు

$$\underset{P \to A}{Lt} \frac{PN}{(PA)^n} = 0$$

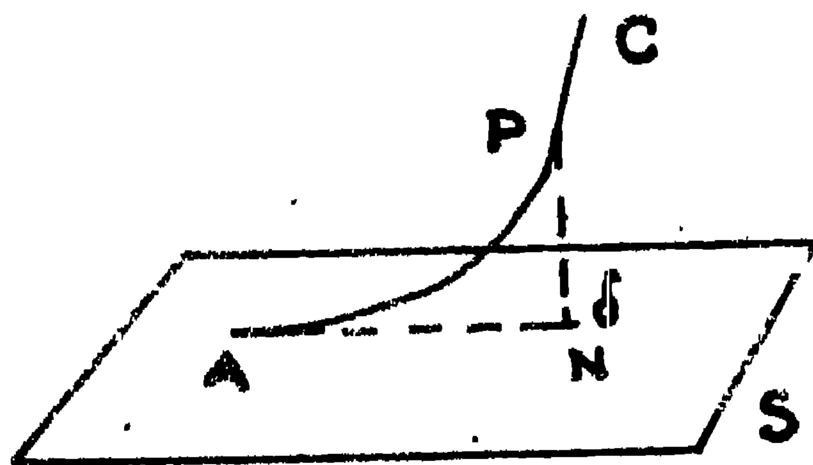
అయ్యే కనిష్ఠ విలువను S, C ల మధ్య కల స్పర్శ పరిమాణము అంటాము.

అంటే n యొక్క ఈ విలువకు

$$\underset{P \to A}{Lt} \frac{PN}{(PA)^n} = 0, \underset{P \to A}{Lt} \frac{PN}{(PA)^{n+1}} = k \neq 0$$ అవుతుంది.

లేదా

అంతరాళములోని ఉపరితలము S వక్రము C లపై కల బిందువులు $P_1, P_2, P_3, .. P_{n+1}$ అయితే $P_2, P_3, ... P_{n+1} \to P_1$ అయినప్పుడు వక్రానికి తలముతో n వ పరిమాణపు స్పర్శ లేక (n + 1) బిందువుల స్పర్శ కలిగి ఉంటుంది అంటాము.



పటము 2.4

ఆవశ్యక – పర్యాప్త నియమాలు :

సమీకరణాలు F(x, y, z) = 0 ; x = x(t), y = y(t), z = z(t) —— (1)

అంతరాళములోని ఉపరితలాన్ని, వక్రాన్ని సూచించిన వీటినుండి x, y, z లను తొలగిస్తే

$$F(x(t), y(t), z(t)) = f(t) \qquad \text{—— (2)}$$

వస్తుంది. $A(t = t_0)$ వద్ద $f(t)$ కి పరిమిత అవకలనులు

$f(p)(t_0)$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ వ్యవస్థితమైన

$P(t = t_1)$ వద్ద $h = t_1 - t_0$ తీసికొన్న టేలర్ విస్తరణ ద్వారా

$f(t_1) = f(t_0 + h) = f(t_0) + h\dot{f}(t_0) + \frac{h^2}{\underline{|2}} \ddot{f}(t_0) + \ldots \frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{n+1}(t_0)$ అవుతుంది.

S పై బిందువు A కనక $f(t_0) = 0$.

సూచన (i) : h కు PA యొక్క పరిమాణము, $f(t_1)$ కు PN యొక్క పరిమాణము కలిగి ఉంటుంది. [$P(x_1, y_1, z_1)$ అయితే A సామీప్యములో PN పరిమాణము $F(x_1, y_1 z_1)$ లేదా $f(t_1)$ యొక్క పరిమాణము ఒకటే అవుతుంది. $\mathbf{r} . \mathbf{n} + p = 0$ సమతలానికి $(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2$ అనుగోళానికి $PN \propto (\mathbf{r}_1 - \mathbf{n}) + p$ మరియు $PN \propto [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{c})^2 - \mathbf{a}^2]$ అని నిరూపించవచ్చును.

సూచన (ii) : $(t_0) \neq 0$ అయితే తలము, వక్రము సాధారణ ఖండన బిందువును కలిగి ఉంటాయని, $f(t_0) = 0, \dot{f}(t_0) \neq 0$ అయితే తలము వక్రము రెండు బిందువుల స్పర్శ లేదా మొదటి పరిమాణపు స్పర్శ కలిగి ఉంటాయని అంటాం. ఇదే విధంగా n వ పరిమాణపు స్పర్శ లేదా (n + 1) బిందువుల స్పర్శ కూడ నిర్వచింపబడుతుంది. కనక తలము, వక్రము n వ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగి ఉండటానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు

$f^i(t_0) = 0, i = 1, 2, 3, .. n$ $f^{n+1}(t_0) \neq 0$ అవుతాయి.

ఇదే విధంగా $C_1 : x = x(t) ; y = y(t) ; z = z(t)$;$C_2 : F_1(x, y, z) = 0 = F_2(x, y, z)$ అనే వక్రాలకు n వ పరిమాణపు స్పర్శ వ్యవస్థితము అవటానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు

$f_1(t_0) = \dot{f}_1(t_0) = \ddot{f}_1(t_0) = \ldots\ldots = f_1^n(t_0) = 0$;

$f_2(t_0) = \dot{f}_2(t_0) = \ddot{f}_2(t_0) = \ldots . f_2^n(t_0) = 0$

కనీసము ఒక $f_1^{n+1}(t_0)$ లేదా $f_2^{n+1}(t_0) \neq 0$ కావలెను.

ఇక్కడ $f_1(t) = F_1(x(t), y(t), z(t))$, $f_2(t) = F_2(x(t), y(t), z(t))$ అవుతాయి.

ఉదా 4 : $x = t^4 - 1, y = t^3 - 1, z = t^2 - 1$ అనే వక్రానికి మూలబిందువు వద్ద రెండవ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగిన సమతల సమీకరణము రాయండి.

మూలబిందువు ద్వారా పోయే సమతలాన్ని $ax + by + cz = 0$ గ తీసికొని వక్రము, సమతల సమీకరణముల నుండి x, y, z లను తొలగిస్తే

$$a(t^4 - 1) + b(t^3 - 1) + c(t^2 - 1) = 0$$ లేదా

$$f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 - (a + b + c) = 0$$ అవుతుంది.

మూలబిందువు $(t = 1)$ వద్ద వక్రము సమతలముల మధ్య రెండవ పరిమాణపు స్పర్శ వ్యవస్థితమైన

$$f(1) = 0,\ \dot{f}(1) = 4a + 3b + 2c = 0,$$

$$\ddot{f}(1) = 12a + 6b + 2c = 0,$$

$$\dddot{f}(1) = 24a + 6b \neq 0$$ కావలెను.

పై సమీకరణములనుండి $a : b : c = 3 : 8 : 6$

కనక సమతల సమీకరణము $3x - 8y + 62 = 0$ అవుతుంది.

ఉదా 5 : $x^4 + 3xyz + x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 3xy - 2y + 2z - 1 = 0$ తో $(0, 0, 1)$ వద్ద మూడవ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగిన సరళరేఖను కనుక్కోండి.

$(0,0,1)$ ద్వారా పోయే సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-1}{n}$$ లేదా $x = lt,\ y = mt,\ z = nt + 1$ అవుతుంది.

ఉపరితల, రేఖా సమీకరణాల x, y, z లను తొలగిస్తే

$$f(t) = l^4t^4 + 3\,lmnt^3 + (l^2 - m^2 - n^2 + 2mn)\,t^2 = 0$$ అవుతుంది.

$t = 0$ వద్ద త్రిపరిమాణ స్పర్శ వ్యవస్థితము కనక

[illegible] $^2 - n^2 + 2mn = 0$ లేదా $l^2 = (m-n)^2$ అవుతుంది.

[illegible] $= 24l^4 \neq 0$ అవుతుంది.

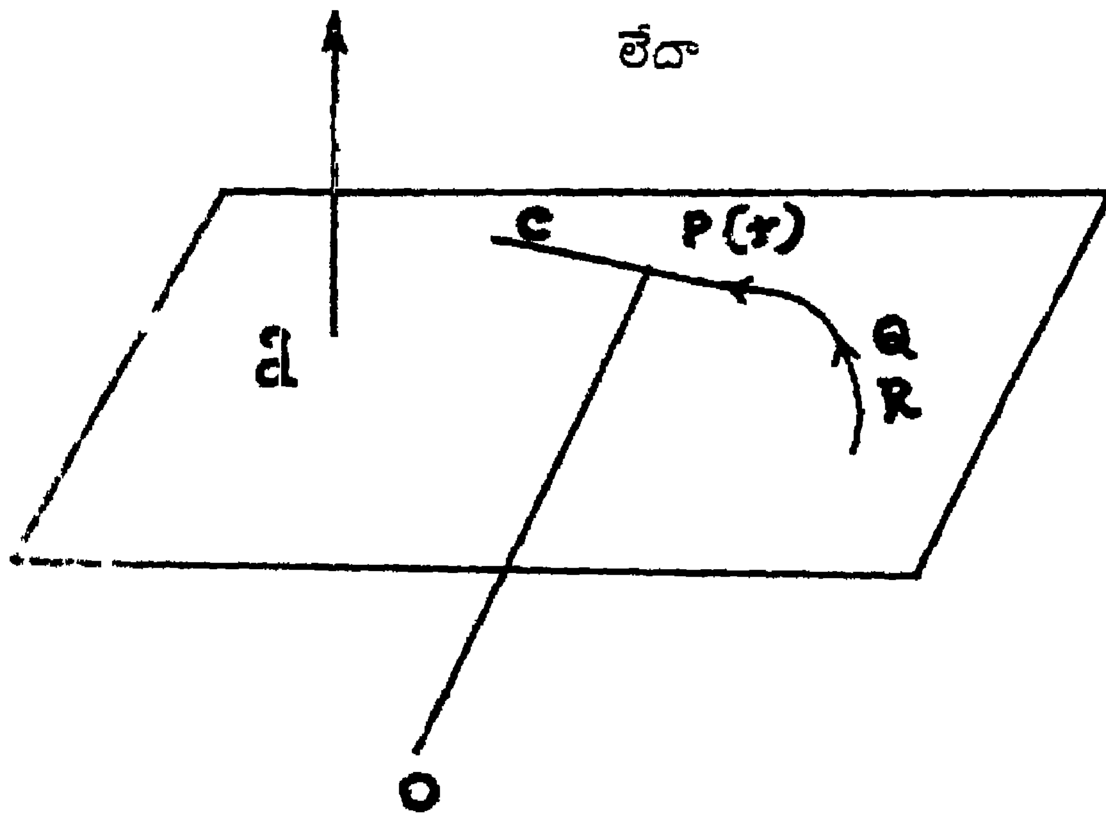
[illegible] $mn = 0$ ను సంతృప్తిపరచే $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-1}{n}$ సరళ రేఖలు ద

[illegible] మూడవ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగి ఉంటాయి.

2.6 [illegible] (వక్రతా సమతలము):

[illegible] వక్రము C పై P వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ ద్వారా పోతూ P సామీప [illegible] Q వద్ద వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖకు సమాంతరముగ ఉండే సమతలము యొక్క అవధిరూపము, Q → P అయినప్పుడు, వక్రానికి P వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతలము అవుతుంది.

లేదా



పటం 2.5

P, Q, R లు ఒక వక్రము మీది బిందువులు అయితే Q, R → P అయినప్పుడు P, Q, R ల ద్వారా పోయే సమతలము యొక్క అవధిరూపము P వద్ద వక్రానికి సంస్పర్శకతలమ[illegible] [illegible]. అంటే వక్రానికి, సమతలానికి మధ్య 2–వ పరిమాణపు స్పర్శ వ్యవస్థితమవుతుంది.

సంస్పర్శకతల సమీకరణము :

మొదటి పద్ధతి : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ అనేది అంతరాళములోని వక్రము అయితే P(t) ∧ Q(t + δt) ల వద్ద వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు $\dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)$ లకు సమాంతరముగ ఉంటాయి. అప్పుడు P వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ ద్వార పోతూ Q వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖకు సమాంతరముగ ఉండే సమతలము

$$\mathbf{r}(t) \wedge \mathbf{r}(t+\delta t) = \left(= \mathbf{r}(t) \wedge \left[\mathbf{r}(t+\delta t) - \mathbf{r}(t)\right] = \mathbf{r}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t)\right)$$

కి లంబంగా ఉంటుంది ($Q \to P$ లేదా $\delta t \to 0$ కనుక).

సంస్పర్శ తలంలోని విలువ బిందువు $\mathbf{R}$ అయితే సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = 0$ అవుతుంది.

రెండవ పద్ధతి : $\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = p$ —— (1)

అనే సమతలము వక్రము యొక్క P, Q, R ($Q, R \to P$) బిందువుల ద్వారాపోయే వక్రానికి, సమతలానికి మధ్య 2వ పరిమాణపు స్పర్శవ్యవస్థితమవుతుంది. అంటే

$f(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - p = 0$ —— (2)

$\dot{f}(t) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = 0$ —— (3)

$\ddot{f}(t) = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = 0$ —— (4) అవుతాయి.

(1), (2) ల నుండి p ని తొలగించిన $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} = 0$ అవుతుంది.

(3), (4) ల నుండి $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ లు కూడా $\mathbf{a}$ కు లంబముగా ఉంటాయి

కనుక $\mathbf{R} - \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ లు సతలీయాలు. కనుక సంస్పర్శకతల సమీకరణము $[\mathbf{R}\ \dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}\ \dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}]$ అవుతుంది.

గమనిక :

(1) $\mathbf{R} - \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ ల మధ్య $\mathbf{R} - \mathbf{r} = \lambda\dot{\mathbf{r}} + \mu\ddot{\mathbf{r}}$ అనే ఏకఘాత సంయోగము వ్యవస్థితమవుతుంది.

(2) కార్టీజియన్ నిరూపకాలలో సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0$$ అవుతుంది.

ఉదా 6 : $x = at^3 + b,\ y = 3ct^2 + 3dt,\ z = 3et + f$ అనే ఘనవక్రముపై ఎన్ని బిందువుల నుండి మూలబిందువు ద్వారా పోయే సంస్పర్శకతలాలు గీయవచ్చును? ఆ బిందువుల $3cex + afy = 0$ అనే తలములో ఉంటాయని చూపండి.

(i) దత్త వక్రానికి (f) బిందువు వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-(at^3+b) & y-(3ct^2+3dt) & z-(3et+f) \\ 3at^2 & 6ct+3d & 3e \\ 6at+6c & (6c) & 0 \end{vmatrix} = 0$$ అవుతుంది.

ఈ సమతలము మూలబిందువు ద్వారాపోతే

$$aect^3 + acft^2 + adft + bec = 0$$

అవుతుంది. ఈ సమీకరణములో (t) ఘాతము (3) కనక వక్రముపై కల మూడు విభిన్న బిందువుల వద్ద గీసిన సంస్పర్శక తలాలు మూలబిందువు ద్వారా పోతాయి.

(ii) పై సమీకరణాన్ని $ce(at^3 + b) + af(ct^2 + dt) = 0$ గ కూడ రాయవచ్చు.

$$\Rightarrow cex + af\frac{y}{3} = 0$$ లేదా $3cex + afy = 0$ అవుతుంది.

అంటే ఆ (3) బిందువులు ఈ సమతలములో ఉంటాయి.

ఉదా 7 : $x = 3r,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ అనే వక్రము సమతలాన్ని (3) బిందువులలో ఖండిస్తుందని చూపి ఈ వక్రానికి (t) వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము కనుక్కోండి.

(i) $r : ax + by + cz + d = 0,\ C : (3t, 3t^2, 2t^3)$ లను సాధించిన $2ct^3 + 3bt^2 + 3at + d = 0$ వస్తుంది. కనక (3) విభిన్న ఖండన బిందువులు ఉంటాయి.

(ii) (t) వద్ద వక్రానికి గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-3t & y-3t^2 & z-2t^3 \\ 3 & 6t & 6t^2 \\ 0 & 6 & 12t \end{vmatrix}$$

s

లేదా $2t^2x - 2ty + z = 2t^3$ అవుతుంది.

ఉదా 8 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ అనే దీర్ఘవృత్తజానికి (α, β, γ) నుండి అభిలంబరేఖలు గీయబడినవి. లంబపాదములనుండి పోయే ఘన వక్రానికి (α, β, γ) వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము కనుక్కోండి.

దీర్ఘవృత్తజానికి (x, y, z) వద్ద స్పర్శతలము

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1, \text{ అభిలంబరేఖ } \frac{X-x}{x/a^2} = \frac{Y-y}{y/b^2} = \frac{Z-z}{z/c^2} \ (= t) \text{ అవుతాయి.}$$

ఈ అభిలంబరేఖ (α, β, γ) ద్వారా పోయినప్పుడు

$$\alpha = \frac{x(a^2+t)}{a^2}, \ \beta = \frac{y(b^2+t)}{b^2}, \ \gamma = \frac{z(c^2+t)}{c^2} \text{ లేదా}$$

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2+t}, \ y = \frac{b^2\beta}{b^2+t}, \ z = \frac{c^2\gamma}{c^2+t} \text{ అవుతుంది.}$$

ఈ సమీకరణము అంతరాళములోని వక్రాన్ని సూచిస్తుంది.

దీనికి (α, β, γ) వద్ద అంటే $t = 0$ వద్ద గీయబడిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-B & z-\gamma \\ \left(\frac{-a^2\alpha}{(t+a^2)^2}\right)_{t=0} & \frac{-\beta}{a^2} & \frac{-\gamma}{c^2} \\ \left(\frac{za^2\alpha}{(t+a^2)^3}\right)_{t=0} & \frac{2\beta}{b^4} & \frac{2\gamma}{c^4} \end{vmatrix} = 0 \text{ లేదా}$$

$$\Sigma (x-\alpha)\, 2\beta\gamma \left(\frac{1}{b^4c^2} - \frac{1}{b^2c^4}\right) = 0 \text{ లేదా}$$

$$\Sigma \frac{(x-\alpha)(c^2-b^2)\, a^4}{\alpha} = 0 \text{ లేదా}$$

$$\frac{a^4x}{\alpha(c^2-a^2)(a^2-b^2)} + 1 = 0 \text{ అవుతుంది.}$$

2.7 రెండు ఉపరితలాల ఛేదన వక్రానికి సంస్పర్శకతలము :

మొదటి పద్ధతి : $f(\bar{r}) = 0$, $\phi(\bar{r}) = 0$ రెండు ఉపరితలములయితే వాటి ఛేదన వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ $\dot{r}$ చే ఉపరితలాల అభిలంబ రేఖలు $\nabla f, \nabla\phi$, లచే సూచింపబడుతాయి.

కనక $\dot{\mathbf{r}}.\nabla f = 0 = \dot{\mathbf{r}}.\nabla\phi$ —— (1)

$\Rightarrow \mathbf{r} \,||\, \nabla f \wedge \nabla\phi \Rightarrow \exists\, \lambda \in R \ni \lambda\dot{\mathbf{r}} = \nabla f \wedge \nabla\phi$ —— (2)

(2) ను (t) దృష్ట్యా అవకలనము చేస్తే

$$\lambda\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\lambda}\dot{\mathbf{r}} = \nabla\dot{f} \wedge \nabla\phi + \nabla f \wedge \nabla\dot{\phi}$$

$\dot{\mathbf{r}}$ తో పూర్వ వజ్రలబ్దము తీసికొనిన

$$\lambda\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}.\nabla\dot{\phi}).\nabla f - \dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\dot{f})\,\nabla\phi$$

కనక సంస్పర్శకతల సమీకరణము $[\mathbf{R}-\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = 0$ అనేది

$$[(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla f]\;(\dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\dot{\phi}) = [(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\phi]\;(\dot{\mathbf{r}}.\nabla\dot{\phi}) \quad \text{లేదా}$$

$$\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla f}{\dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\dot{f}} = \frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\phi}{\dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\dot{\phi}}$$ అవుతుంది.

రెండవ పద్ధతి : $f(r) = 0$, $\phi(r) = 0$ అనే తలాలకు $P(\mathbf{r})$ వద్ద గీసిన స్పర్శతలాలు $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla f = 0$, $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\phi = 0$ అవుతాయి.

వీటి ఛేదన (స్పర్శ) రేఖ ద్వారా పోయే సమతల సమీకరణము

$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla f - \lambda\,[(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\phi] = 0$ —— (3) అవుతుంది.

ఈ సమతలము ఛేదన వక్రానికి P వద్ద సంస్పర్శకతలము అవటానికి వక్రముతో 2 వ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగి ఉండాలి.

$\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}\,.\,\nabla f + (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\dot{f} - \lambda\,[\dot{\mathbf{R}}\,.\,\nabla\phi + (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,.\,\nabla\dot{\phi}] = 0$ —— (4)

$\mathbf{R} = \mathbf{r}$ వద్ద $\dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla f - \lambda\dot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\phi = 0$ అవుతుంది. —— (5)

$\dot{\mathbf{r}}$ స్పర్శరేఖ, ∇f, $\nabla\phi$ లు ఉపరితలములకు అభిలంబరేఖలు కనక పై సమీకరణము సత్యమే.

అట్లే 2 వ పరిమాణపు అవకలజము రాసిన

$\mathbf{R} = \mathbf{r}$ వద్ద $\ddot{\mathbf{r}}\;\nabla f - \lambda\ddot{\mathbf{r}}\,.\,\nabla\phi = 0$ —— (6)

అవుతుంది.

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f}{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \phi}$$

$\dot{\mathbf{r}}.\nabla f = 0,\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\phi = 0$ ల నుండి

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f = -(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{f})\ ;\ \ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\phi = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{\phi} \qquad \text{——(7)}$$

అవుతుంది.

సమీకరణము (6) నుండి (7) నుండి

$$\lambda = \frac{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f}{\ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \phi} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{f}}{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{\phi}} \qquad \text{——(8)}$$

అవుతుంది.

(3), (8) సమీకరణములనుండి

$$\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \nabla f}{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \nabla \phi} = \lambda = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{f}}{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{\phi}} \text{ లేదా}$$

$$\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \nabla f}{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{f}} = \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \nabla \phi}{\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\dot{\phi}}$$

P(r) వద్ద సంస్పర్శకతలమును సూచిస్తుంది.

కార్టీజియన్ నిరూపకములలో $\mathbf{R} = (X, Y, Z), \mathbf{r} = (x, y, z)$,

$\nabla f = (f_x, f_y, f_z), \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z),\ \dot{f}_x = f_{xx}\dot{x} + f_{xy}\dot{y} + f_{xz}\dot{z},$ ....

అవుతాయి కనక సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\frac{(X - x) f_x + (Y - y) f_y + (Z - z) f_z}{\sum \dot{x} (f_{xx}\dot{x} + f_{xy}\dot{y} + f_{xz}\dot{z})} = \frac{(X - x)\phi_x + (Y - y)\phi_y + (Z - z)\phi_z}{\sum \dot{x} (\phi_{xx}\dot{x} + \phi_{xy}\dot{y} + \phi_{xz}\dot{z})}$$

అవుతుంది.

ఉదా 9 : $x^2 + 2ax + y^2 + 2by = z^2 + 2cz$ అనే వక్రానికి P వద్ద గీయబడిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము రాయండి.

$f(x, y, z) = x^2 + 2ax - y^2 - 2by = 0$; $\phi(x, y, z) = y^2 + 2by - z^2 - cz = 0$

$\Rightarrow f_x = 2x + 2a,\ f_y = -2y - 2b,\ f_z = 0 ; \phi_x = 0, \phi_y = 2y + 2b,\ \phi_z = -2z - 2c$;

$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -2,\ \phi_{yy} = 2,\ \phi_{zz} = -2,$

ఇతర 2 వ పరిమాణపు పాక్షిక అవకలజములు శూన్యము $df = 0, d\phi = 0$ ల నుండి

$$\frac{\dot{x}}{(y + b)(z + c)} = \frac{\dot{y}}{(z + c)(x + a)} = \frac{\dot{z}}{(x + a)(y + b)}$$ అవుతుంది.

కనక $P(x, y, z)$ వద్ద సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\frac{(X - x)(x + a) - (Y - y)(y + b)}{(z + c)^2 \{(y + b)^2 - (x + a)^2\}} = \frac{(Y - y)(Y + b) - (Z - z)(z + c)}{(x + a)^2 \{(z + c)^2 - (y + b)^2\}}$$ లేదా

$\sum (X - x)(x + a)^3 \{(z + c)^2 - (y + b)^2\} = 0$ లేదా

$(X - x)(x + a)^3 (c^2 - b^2) + (Y - y)(y + b)^3 (a^2 - c^2) + (Z - z)(z + 1)^3 (b^2 - a^2) = 0$

అవుతుంది.

ఉదా 10 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,\ \alpha x^2 + By^2 + \gamma z^2 = 1$ అనుశాంకవజాల ఛేదన వక్రానికి P వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము కనుక్కోండి.

$f(x, y, z) = ax^2 + bx^2 + cz^2 - 1 = 0,\ g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow f_x = 2ax, f_y = 2by,\ f_z = 2cz$; $g_x = 2\alpha x,\ g_y = 2\beta y,\ g_z = 2\gamma z$;

$f_{xx} = 2a,\ f_{yy} = 2b,\ f_{zz} = 2c ; g_{xx} = 2\alpha,\ g_{yy} = 2\beta,\ g_{zz} = 2\alpha$

మిగిలిన 2 వ పరిమాణపు పాక్షిక అవకలజాలు శూన్యము అవుతాయి.

$df = 2ax\,\dot{x} + 2by\,\dot{y} + 2cz\,\dot{z} = 0$; $d\phi = 2\alpha x\,\dot{x} + 2\beta y\,\dot{y} + 2\gamma z\,\dot{z} = 0$ కనక

$$\frac{x\dot{x}}{b\gamma - c\beta} = \frac{y\dot{y}}{c\alpha - a\alpha} = \frac{z\dot{z}}{a\beta - b\alpha}$$ లేదా

$$\frac{x\dot{x}}{A} = \frac{y\dot{y}}{B} = \frac{z\dot{z}}{C}$$ అవుతుంది.

కనుక P(x, y, z) వక్రానికి గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\frac{(X-x)\,ax + (Y-y)\,by + (Z-z)\,cz}{\frac{aA^2}{x^2} + \frac{bB^2}{y^2} + \frac{cC^2}{z^2}} = \frac{(X-x)\,\alpha x + (Y-y)\,\beta y + (Z-z)\,\gamma z}{\frac{\alpha A^2}{x^2} + \frac{\beta B^2}{y^2} + \frac{\gamma C^2}{z^2}}$$ లేక

$$(X-x) \times \left(\frac{a\beta B^2 - b\alpha B^2}{y^2} + \frac{a\gamma C^2 - c\alpha C^2}{z^2}\right) = 0$$ లేదా

$$(X-x) \times \left(\frac{B^2C}{y^2} - \frac{BC^2}{z^2}\right) = 0$$ లేదా

$$(X-x)\ \frac{x^3}{A}\ (Bz^2 - Cy^2) = 0$$ అవుతుంది.

$\alpha f - ag = (Bz^2 - Cy^2) - (\alpha - a) = 0$ .... ల సహాయముతో

ఈ సమీకరణము

$$\frac{BCx^3\,X}{(\beta-b)(\gamma-c)} + \frac{CA\,y^3\,Y}{(\gamma-c)(\alpha-a)} + \frac{AB\,z^3\,Z}{(\alpha-a)(\beta-b)} + 1 = 0$$ అవుతుంది.

ఉదా 11 : ఒక వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతలము స్థిరబిందువు ద్వారాపోతే ఆ వక్రము సమతల వక్రము అవుతుందని చూపండి.

దత్త వక్రముపై (4) బిందువులు A_1, A_2, A_3, A_4 లను తీసికొనిన A_1, A_2, A_3 ల ద్వారాపోయే సంస్పర్శకతలము స్థిరబిందువు A ద్వారా పోతుంది. అట్లే A_1, A_2, A_4 ల ద్వారాపోయే సంస్పర్శకతలము A ద్వారాపోతుంది. ఈ రెండు తలాలు A_1, A_2, A ద్వారా పోతాయి కనుక ఏకీభవిస్తాయి. ఈ ప్రతిపాదన A_1, A_2, A_3, A_4 లకే కాక A_2, A_3, A_4, A_5 లకు కూడ వర్తిస్తుంది. అంటే ఈ వక్రంపై కల అన్ని బిందువులు సంస్పర్శకతలములో ఉంటాయి కనుక దత్త వక్రము సమతల వక్రము అవుతుంది.

ఉదా 12 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ అనే శాంకవజము, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{r}$ అనే గోళాల ఛేదన వక్రానికి గీయబడిన సంస్పర్శకతలాలు మూలబిందువు ద్వారపోతే వక్రము యొక్క ఆ బిందువులు శంకువుపై ఉంటాయని చూపండి.

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \;;\; g = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{r} = 0$$ కావున

$$f_x = 2ax, f_y = 2by, f_z = 2cz \;;\; g_x = 2x,\; g_y = 2y, g_z = 2z \;;$$

$$f_{xx} = 2a,\; f_{yy} = 2b,\; f_{zz} = 2c \;;\; g_{xx} = 2 = g_{yy} = g_{zz}$$

కావున P(x, y, z) వద్ద గీయబడిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము ఉదా. 10 నుండి

$$\sum (X - x)\, x^3 (c - a)(a - b) \{(c - a) z^2 - (a - b) y^2\} = 0$$ అవుతుంది.

$rf - ag = 0$ నుండి పై సమీకరణము

$$\sum (X - x)\, x^3 (c - a)(a - b)(r - a) = 0$$ అవుతుంది.

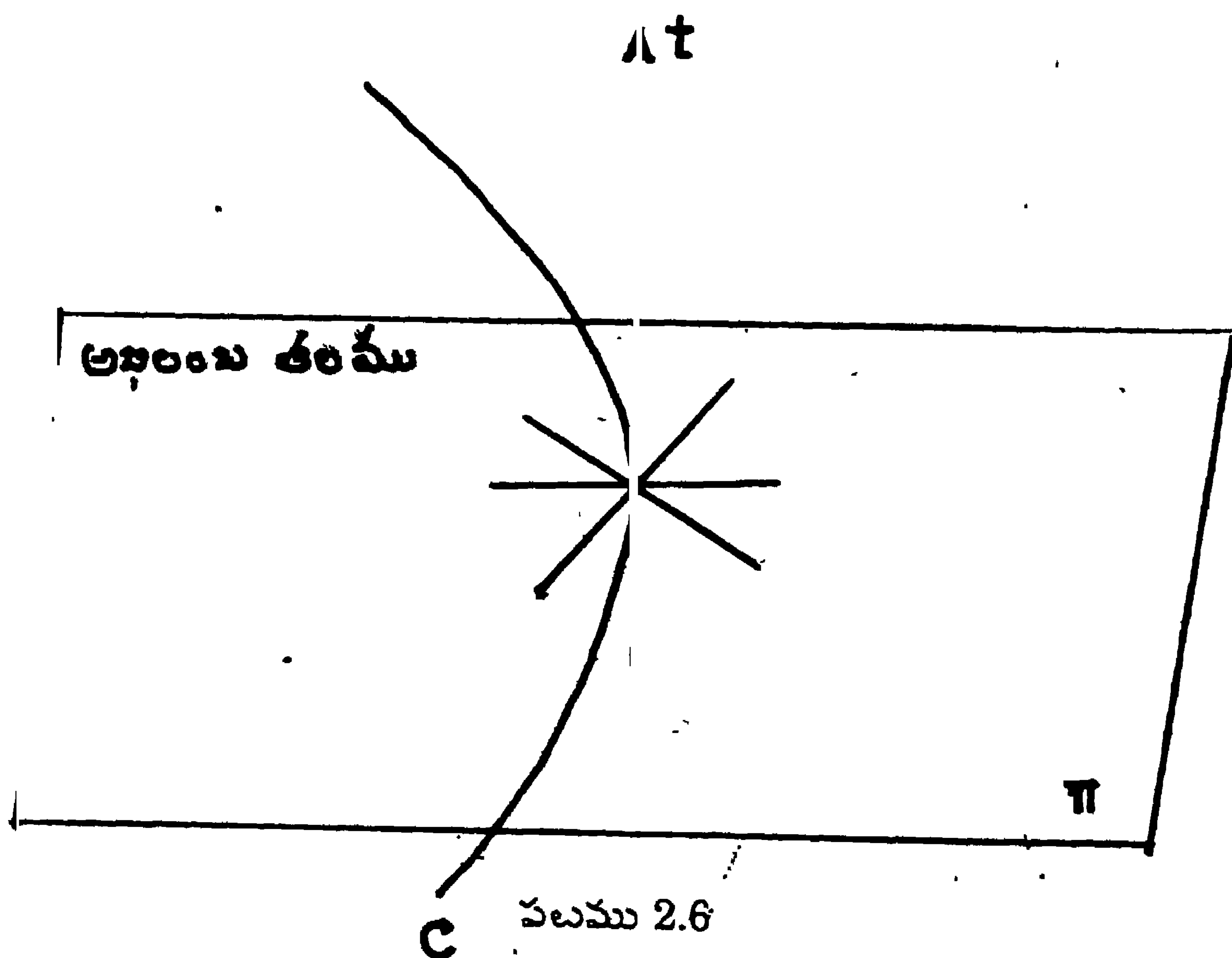
ఈ సమతలము మూలబిందువు ద్వారాపోతోంది కనక

$$\frac{r - a}{b - c} x^4 + \frac{r - b}{c - a} y^4 + \frac{r - c}{a - b} z^4 = 0$$

అవుతుంది లేక వక్రముపై దత్త ధర్మము కలిగిన బిందువులు పై శంకువుపై ఉంటాయి.

2.8 అభిలంబతలము :

ఒక వక్రానికి ఒక బిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖకు లంబముగ ఉండే సమతలాన్ని అభిలంబతలము అంటాము. ఆ వక్రానికి ఇవ్వబడిన బిందువు వద్ద గీయబడిన అన్ని అంబరేఖలను ఈ సమతలము కలిగి ఉంటుంది.



పటము 2.6

$P(\mathbf{r})$ వద్ద వక్రము యొక్క అభిలంబతలము $(\mathbf{R}-\mathbf{r}).\dot{\mathbf{r}}=0$ లేదా $(\mathbf{R}-\mathbf{r}).\mathbf{t}=0$ అవుతుంది. సంస్పర్శకతలానికి గీయబడిన అభిలంబరేఖ $\dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}}$ కు సమాంతరము మరియు అభిలంబతలానికి $\mathbf{r}$ లంబము అవుతుంది. కనక $[\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}]=0$ నుండి సంస్పర్శకతలము, అభిలంబతలముల మధ్యకోణము 90° అవుతుందని గమనించవచ్చు.

నిర్వచనాలు :

1) అభిలంబతలము, సంస్పర్శకతలముల ఖండనరేఖను ప్రధాన అభిలంబరేఖ అంటాము. అంటే సంస్పర్శకతలములో ఉండే సంస్పర్శకతలములోఉండే ఒకేఒక అభిలంబము ప్రధాన అభిలంబరేఖ అవుతుంది.

(2) ప్రధాన అభిలంబరేఖకు (తద్వార సంస్పర్శక తలానికి) లంబముగ ఉండే, అభిలంబరేఖను ఉపాభిలంబరేఖ అంటాము.

సూచన :

(i) ఉపాభిలంబరేఖ సంస్పర్శకతలమునకు లంబము అంటే $\mathbf{b}\,||\,\dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}}$

(ii) ప్రధాన అభిలంబరేఖ స్పర్శరేఖకు, ఉపాభిలంబరేఖకు లంబము కావున

$$\mathbf{n}\,||\,\dot{\mathbf{r}}\wedge(\dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}})$$

(iii) పరామితిని (t) బదులు వక్రచాపము (s) గ తీసికుంటే

$$\mathbf{b}\,||\,\mathbf{r}'\wedge\mathbf{r}'',\ \mathbf{n}\,||\,\mathbf{r}''\ (\mathbf{r}'.\mathbf{r}''=0,\ \mathbf{r}'^2=1)$$ అవుతుంది.

2.9 మౌలికతలాలు :

అంతరాళములోని ఒక వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద మూడు పరస్పర లంబసదిశలు స్పర్శరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖలు ఉంటాయి. ఈ దిశలలోని యూనిట్ సదిశలను $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}$ లతో సూచిస్తాము. వీటితో వక్రముపై కల దత్త బిందువు వద్ద

(i) $\mathbf{t}.\mathbf{n}=\mathbf{n}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{t}=0$, (ii) $\mathbf{t}^2=\mathbf{n}^2=\mathbf{b}^2=1$ మరియు

(iii) $\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}=\mathbf{b},\ \mathbf{n}\wedge\mathbf{b}=\mathbf{t},\ \mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=\mathbf{n}$

అయ్యేటట్లు లంబాభిలంబ యూనిట్ సదిశల త్రికము ఏర్పడుతుంది.

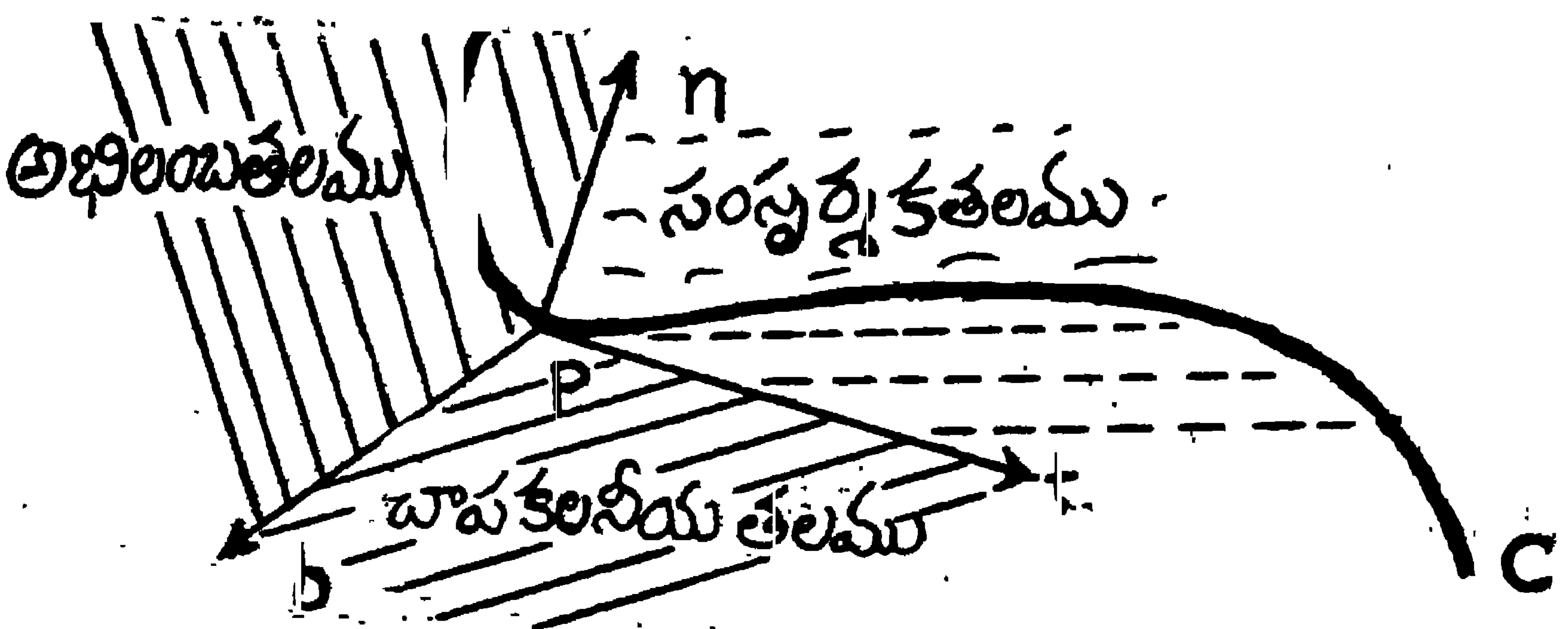
వీటిలో $\mathbf{t}$ యొక్క ధనాత్మక దిశను వక్రచాపము యొక్క ఆరోహణ దిశలోను, ($\mathbf{n}$) ప్రధాన అభిలంబరేఖను 'E' దిశలోను, ఉపాభిలంబరేఖ ($\mathbf{b}$) ని $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ సవ్య (కుడి) సదిశాత్రికమగునట్లు తీసుకుంటాము. $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ లను వక్రము C పై ఫ్రెనేట్ వ్యటక్షేత్రము అని అంటాము. దీనిని $F(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ చే సూచిస్తాము. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ లను సహజ వ్యటక్షేత్రము అంటాము. వక్రము గురించి విపులముగ ఈ ఫ్రేనెట్ చ్రటక్షేత్రముతో మాత్రమే వీలవుతుంది. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ లతో ఇది సాధ్యము కాదు.

$\mathbf{R}$ సమతలములోని చలన బిందువు, $\mathbf{r}$ వక్రముపై దత్త బిందువు అయిన ($\mathbf{r}$) వద్ద కల చలనత్రిక సదిశలు మూడు పరస్పర లంబసమతలముల

(i) సంస్పర్శతలము ($\mathbf{t}, \mathbf{n}$ లు కలిగినది). దీని సమీకరణము $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) . \mathbf{b} = 0$

(ii) అభిలంబతలము ($\mathbf{n}, \mathbf{b}$ లు కలిగినది). దీని సమీకరణము $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) . \mathbf{t} = 0$ మరియు

(iii) చాపకలనీయతలము ($\mathbf{b}, \mathbf{t}$ లు కలిగినది). దీని సమీకరణము $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) . \mathbf{n} = 0$ లను నిర్ధారించుతాయి. వీటిని మౌలిక తలములు అంటాము.



పటము - 2.7

ఉదా 13 : $\mathbf{r} = (t^3 - 1, \sqrt{3}\,(t^2 - 1), 2t - 2)$ అనే వక్రానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖలు $x = z, y = 0$ తో సమానకోణములు చేస్తాయని చూపండి.

$$\dot{\mathbf{r}} = (3t^2, 23\sqrt{t}, 2) \Rightarrow \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \left(\frac{3t^2}{3t^2+2}, \frac{2\sqrt{3}t}{3t^2+2}, \frac{2}{3t^2+2}\right) = \mathbf{t};$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (6t, 2\sqrt{3}, 0) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = (-4\sqrt{3}, 12t, -6\sqrt{3}\,t^2) \,||\, \mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{b} = \left(\frac{-2}{3t^2+2}, \frac{2\sqrt{3}t}{3t^2+2}, \frac{-3t^2}{3t^2+2}\right)$$ అవుతుంది.

సరళరేఖ L : $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ కనుక **t**, L ల మధ్యకోణము $\cos^{-1} \frac{3t^2+2}{(3t^2+2)\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

b, L ల మధ్యకోణము $\cos^{-1} \frac{-2-3t^2}{(3t^2+2)\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{4}$ అవుతుంది.

సూచన : పై లెక్కలో **t**, **L**, **b** లు సతలీయాలు అవుతాయి.

$$\because \begin{vmatrix} 3t^2 & 2\sqrt{3}t & 2 \\ -2 & 2\sqrt{3}t & -3t^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 = [\mathbf{t}\ \mathbf{b}\ \mathbf{L}]$$

ఉదా 14 : $x = a \sin t,\ y = a \cos t,\ z = a \tan \theta$ అనే వర్తులకుండలిని యొక్క స్పర్శరేఖ z – అక్షముతో స్థిరకోణము చేస్తుంది.

- వక్రముపై P(t) వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు

$(a \cos t, -a \sin t,\ a \tan \theta)$ మరియు

z – అక్షము యొక్క దిక్ కొసైన్ లు (0,0,1) కనుక మధ్యకోణము

$$\cos^{-1} \frac{a \tan \theta}{a \sec \theta} = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ (స్థిరకోణము)}.$$

ఉదా 15 : $\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, c\theta)$ కుండలినికి గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖ ఆ స్థూపానికి లంబమని చూపండి.

$$\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, c\theta)$$

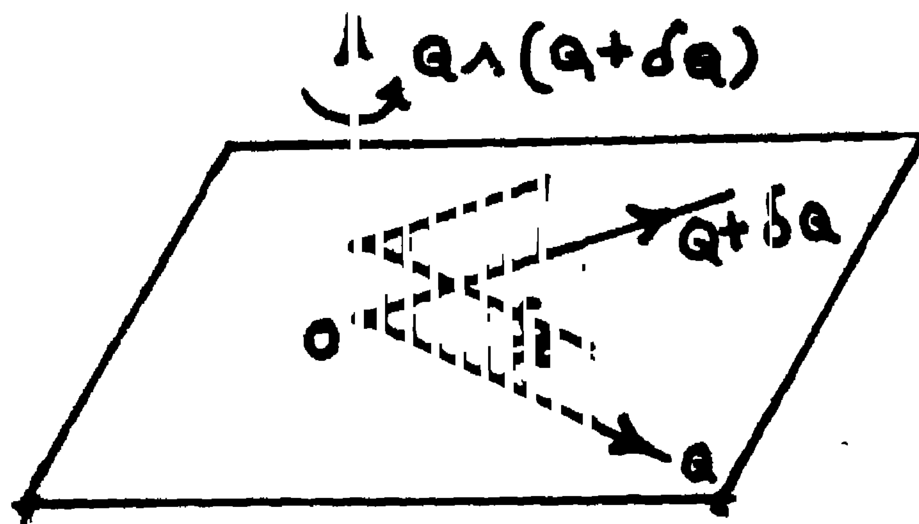
$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = (-a \sin \theta, a \cos \theta, c), \ \frac{d^2r}{d\theta^2} = (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)$$

వక్రము యొక్క ప్రధాన అభిలంబరేఖ $\mathbf{r}''$ కు సమాంతరము కావున $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ స్థూపాక్షము (0,0,1). వీటి మధ్యకోణము $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ అంటే దత్త కుండలినికి గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖ దత్త స్థూపమునకు లంబమవుతుంది.

2.10 సదిశ యొక్క భ్రమణ సదిశ :

భ్రమణరేటు పరిమాణంగాను, తాత్కాలిక భ్రమణాక్షము దిశగాను కల సదిశను దత్త సదిశ యొక్క భ్రమణ సదిశ అంటాము.

పరామితులు (t), $(t + \delta t)$ లకు అనురూప సదిశలు $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}$ అయితే



పటము - 2.8

$$\mathbf{n} \sin\delta\theta = \frac{\mathbf{Q} \wedge (\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q})}{|\mathbf{Q}|\ |\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}|} \Rightarrow \mathbf{n}\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\mathbf{Q} \wedge \delta\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|\,|\mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}|} \cdot \frac{1}{\delta r}$$

$\delta t \to 0$ అయిన $\mathbf{n}\dot{\theta} = \frac{\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2}$ అవుతుంది.

$\frac{\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2}$ యొక్క పరిమాణము $(= \dot{\theta})$ $\mathbf{Q}$ పై ఆధారపడలేదు కనుక $\mathbf{Q}$- యొక్క భ్రమణసదిశ

$S(\mathbf{Q})$ ను $\frac{\mathbf{Q} \wedge \dot{\mathbf{Q}}}{|\mathbf{Q}|^2}$ గ నిర్వచిస్తాము. $\mathbf{E}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ భ్రమణసదిశలు

$S(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'$, $S(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'$, $S(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}'$ అవుతాయి ($\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$ కనుక)

2.11 వక్రత, విమోటనము, స్క్యూ (skew) వక్రత :

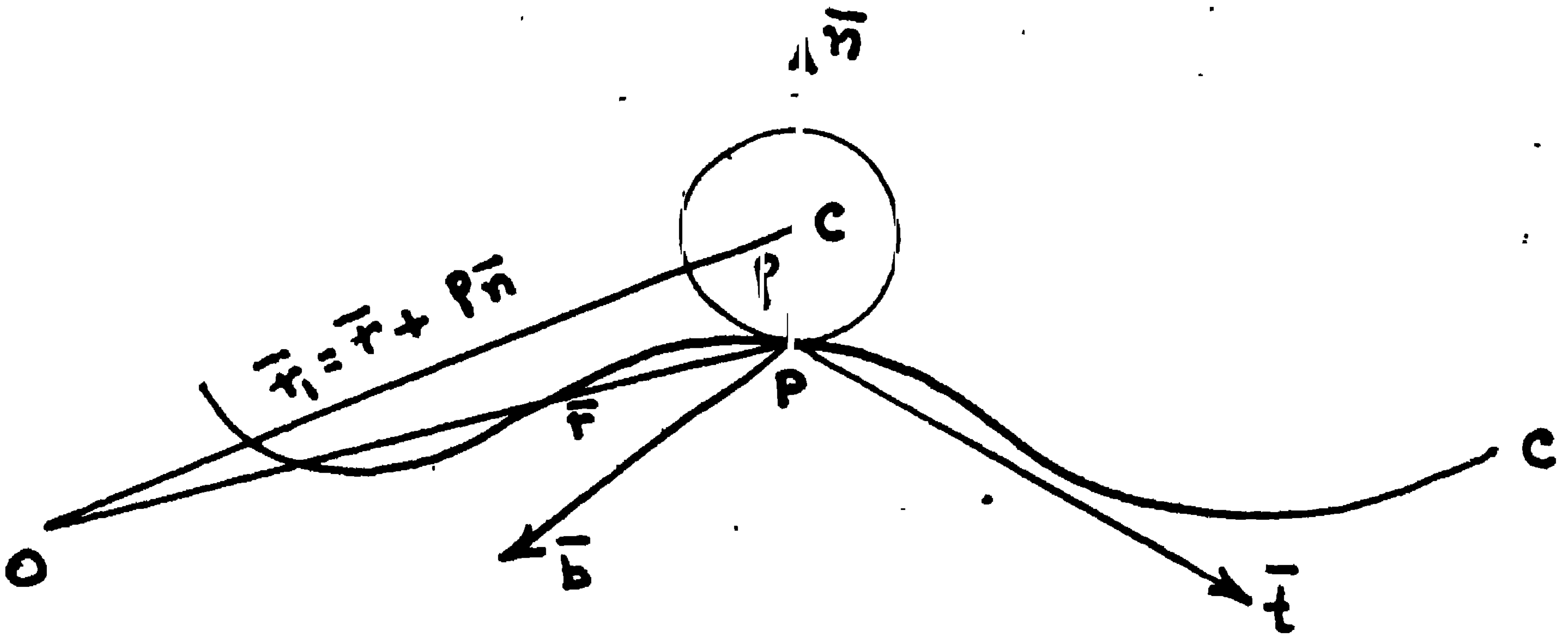
నిర్వచనము - 1. వక్రచాపము (S) దృష్ట్యా స్పర్శరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖల మార్పు రేటులను వరుసగ వక్రత, విమోటనము, స్క్యూ వక్రత సదిశలు అంటాము.

నిర్వచనము - 2. **t, n, b** ల భ్రమణసదిశల పరిమాణములు వరుసగ వక్రత (k) విమోటనము (τ) మరియు స్క్యూ వక్రత $\sqrt{k^2+\tau^2}$ అవుతాయి.

సూచన :

(1) $\frac{1}{k}=\rho$ ను వక్రతా వ్యాసార్ధమనియు, $\frac{1}{\tau}=\pi$ ను విమోటన వ్యాసార్ధము అని అంటాము.

(2) **n** యొక్క దిశను k ధనాత్మకమయేటట్లు అంటే వక్రతా కేంద్రము $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$ వైపు తీసుకుంటాము.



పటము - 2.9

PC సంస్పర్శకతలములో ఉంటుంది. ఈ సంస్పర్శకతలములో ρ వ్యాసార్ధముగలకల వృత్తమును సంస్పర్శకవృత్తము లేదా వక్రతావృత్తము అంటాము.

(3) k సర్వత్రాధనాత్మకమవుతుంది, τ ధనాత్మకము లేక ఋణాత్మకము కావచ్చు కనక τ సంజ్ఞా అదిశ అవుతుంది.

ఫ్రెనెట్ చట్రము, k, τ లతో కలిపి ఫ్రెనెట్ పరికరము అనబడుతుంది. ఈ ఫ్రెనెట్ పరికరము అవకలన జ్యామితిని, అంతరాళంలోని వక్రాలకు సంబంధించి పూర్తి నియంత్రిస్తుంది.

t యొక్క భ్రమణసదిశ

$$S(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}' = \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \parallel \mathbf{b}$$ మరియు

$$|S(\mathbf{t})| = k$$ కనక $S(\mathbf{t}) = k\,\mathbf{b}$ అవుతుంది.

b యొక్క భ్రమణసదిశ

$$S(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}' = \frac{(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') \wedge (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''|^2}$$

$$= \frac{(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') \wedge (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''')}{k^2} = \frac{[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}''']\,\mathbf{r}'}{k^2}$$

లేదా $\dfrac{[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}''']\,\mathbf{t}}{k^2}$ అవుతుంది.

కాని $|S(\mathbf{b})| = \tau$ కనక $S(\mathbf{b}) = \tau\,\mathbf{t}$ అవుతుంది, మరియు $k^2 \geq$ కనక

τ, $[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}''']$ ఒకే గుర్తు కలిగి ఉంటాయి.

అనగ ఉపాభిలంబరేఖ, స్పర్శరేఖ వెంబడి కల అక్షము దృష్ట్యా భ్రమణము చెందుతుంది.

n యొక్క భ్రమణ సదిశ

$$S(\mathbf{n}) = S(\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) \wedge \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t}'$$

$$= (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) \wedge (\mathbf{b}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}')$$

$$= \mathbf{t}\,[\mathbf{b}\,\mathbf{b}'\,\mathbf{t}] + \mathbf{b}\,[\mathbf{b}\,\mathbf{t}\,\mathbf{t}']$$

$$= \tau\,\mathbf{t} + k\,\mathbf{b}$$

దీనిని డార్బాక్స్ సదిశ అంటాము. **n** చాపకలనీయ తలములో ఉంటుంది.

పై సమీకరణముల నుండి **t, n, b** ల దృష్ట్యా త్రికము (**t, n, b**) ల తత్క్షణభ్రమణ సూచనలు $(\tau, 0, k)$ ఉంటాయని గమనించవచ్చును. ఇవి వక్రచాపము దృష్ట్యా ఈ యూనిట్ సదిశల మెలిపెట్టును వ్యక్తపరుస్తాయి.

2.12 ఫ్రెనెట్ - సెర్రెట్ సూత్రములు :

మొదటి పద్ధతి : $\mathbf{t}.\mathbf{t}=1 \Rightarrow \mathbf{t}.\mathbf{t}^{\prime}=0 \Rightarrow \mathbf{t}^{\prime} \perp \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t}^{\prime} (=\mathbf{r}^{\prime\prime})$ అభిలంబతలములో ఉంటుంది.

సంస్పర్శకతలమునకు గీసిన లంబరేఖ $\mathbf{r}^{\prime} \wedge \mathbf{r}^{\prime\prime}$ కు సమాంతరము,

$\mathbf{r}^{\prime\prime} \perp \mathbf{r}^{\prime} \wedge \mathbf{r}^{\prime\prime} \Rightarrow \mathbf{r}^{\prime\prime}$ సంస్పర్శకతలములో ఉంటుంది.

కావున $\mathbf{r}^{\prime\prime} \,||\, \mathbf{n}$. (§ 2.8 చూడగలరు). మరియు

$|\mathbf{t}^{\prime}| = k$ కావున $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}$ —— (1)

$\mathbf{b}=\mathbf{t}\wedge\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{b}^{\prime}=\mathbf{t}^{\prime}\wedge\mathbf{n}+\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}^{\prime}=\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}^{\prime}$ ($\because \mathbf{t}^{\prime}=k\mathbf{n}$) అతిగి

$\mathbf{n}^2=1 \Rightarrow \mathbf{n}.\mathbf{n}^{\prime}=0 \Rightarrow \mathbf{n}^{\prime} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n}^{\prime}=\lambda(s)\,\mathbf{b}+\mu(s)\,\mathbf{t}$ కావున

$\mathbf{b}^{\prime}=-\lambda(s)\,\mathbf{n}$ కాని $|\mathbf{b}^{\prime}|=\tau$

కావున $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}=-\tau\mathbf{n}$ —— (3)

ఇందులోని ఋణాత్మక విలువ, వక్రచాపము s పెరిగినప్పుడు b యొక్క భ్రమణసదిశ t దిశలో పయనించు కుడి (సవ్య) స్క్రూను పోలి ఉంటుంది. అనగా ఉపాభిలంబరేఖ s విలువ పెరుగుదిశలో వక్రము వెంబడి చలించునపుడు స్పర్శరేఖ చుట్టు n నుండి b కి twisted చలనము కలిగి ఉంటుంది.

$\mathbf{n}=\mathbf{b}\wedge\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{n}^{\prime}=\mathbf{b}^{\prime}\wedge\mathbf{t}+\mathbf{t}^{\prime}\wedge\mathbf{b}=\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t}$ (పైసమీకరణములనుండి)

రెండవ పద్ధతి : $\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}^{\prime}=s(\mathbf{t})=k\mathbf{b}$ (§ 2.12 చూడగలరు).

$\Rightarrow (\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}^{\prime})\wedge\mathbf{t}=\mathbf{t}^{\prime}=k\mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{t}.\mathbf{t})\,\mathbf{t}^{\prime}=k\mathbf{n}$ ($\because \mathbf{t}^{\prime}\perp\mathbf{t}$)

$\Rightarrow \dfrac{d\mathbf{t}}{ds}=k\mathbf{n}$ ($\because \mathbf{t}^2=1$) —— (1)

$s(\mathbf{n})=\mathbf{n}\wedge\mathbf{n}^{\prime}=\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b}$ మరియు $(\mathbf{n}\wedge\mathbf{n}^{\prime})\wedge\mathbf{n}=\mathbf{n}^{\prime}$

కావున $\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}=(\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})\wedge\mathbf{n}=\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t}$ —— (2)

$s(\mathbf{b})=\mathbf{b}\wedge\mathbf{b}^{\prime}=\tau\mathbf{t}$ మరియు $(\mathbf{b}\wedge\mathbf{b}^{\prime})\,\mathbf{b}=\mathbf{b}^{\prime}$

కావున $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) = -\tau\mathbf{n}$ —— (3)

ఈ ఫ్రెనెట్ - సెర్రెట్ సూత్రములను మాత్రికారూపములో

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

గ ఇంకా డార్బాక్స్ సదిశ $\omega = \tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}$ ని ఉపయోగించి ఈ సూత్రాలను

$\mathbf{t}' = \omega \wedge \mathbf{t}$, $\mathbf{n}' = \omega \wedge \mathbf{n}$, $\mathbf{b}' = \omega \wedge \mathbf{b}$ గ కూడ రాయవచ్చును.

ఫ్రెనెట్ విస్తరణ సూత్రములు :

ఏదైన ఒక వక్రము $r = r(t)$ కి M కు అను రూపముగ $\dot{M} = M'\dot{s}$ లేదా $\dot{M} = vM'$ అవుతుంది కనుక $\dot{\mathbf{t}} = kv\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = v(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{n})$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau v\mathbf{n}$ అవుతుంది. అంటే వక్రము యొక్క వడి సాధారణముగా సరిచేయుకారణాంకము అవుతుంది.

ఉదా 11 : (రెండవ పద్ధతి) ఒక వక్రము సమతల వక్రము అవటానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $\tau = 0$ అవుతుంది.

ఆవశ్యకము : వక్రము సమతల వక్రము అయిన దానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు, అభిలంబరేఖలు సతలీయములు అవుతాయి (సంస్పర్శకతలములో ఉంటాయి).

$\Rightarrow$ ఉపఅభిలంబరేఖ అన్నిబిందువుల వద్ద పరిమాణము (=1) దిశలలో స్థిరసదిశ అవుతుంది.

$\Rightarrow \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \tau = 0.$

పర్యాప్తము: $\tau = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 \Rightarrow \mathbf{b}$ స్థిరసదిశ

$\Rightarrow$ సంస్పర్శకతలము వక్రమును కలిగి ఉంటుంది.

ఉదా 16 : $\mathbf{t}' = \omega \wedge \mathbf{t}$ అని చూపండి

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n} = k(\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) = (k\mathbf{b}) \wedge \mathbf{t} = (k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}) \wedge \mathbf{t} = \omega \wedge \mathbf{t}$$

ఉదా 17 : $[\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}''] = \tau k^2$ అని చూపండి

మొదటి పద్ధతి : $[\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}''] = \mathbf{t}\,.\,\{k\mathbf{n} \wedge (k\mathbf{n})'\} = k\mathbf{t}\,.\,\{\mathbf{n} \wedge (k'\mathbf{n} + k\,(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})\}$

రెండవ పద్ధతి : $s(\mathbf{b}) = \dfrac{[\mathbf{r}'\ \mathbf{r}''\ \mathbf{r}''']\ \mathbf{t}}{k^2}$ మరియు $|s(\mathbf{b})| = \tau$

కావున $[\mathbf{r}'\ \mathbf{r}''\ \mathbf{r}'''] = [\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}''] = k^2\tau$ అవుతుంది.

ఉదా 18 : (i) $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}'' = kk'$ (ii) $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}''' = k\,(k'' - k^3 - k\tau^2)$, (iii) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}''' = -3kk'$

(iv) $\mathbf{t}'' \cdot \mathbf{t}''' = k'\,k'' + 2k^3k' + k^2\,\tau\tau' + kk'\,\tau^2$ మరియు

(v) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}'' = -k^2$ $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$, $\mathbf{t}'' = k(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) + k'\mathbf{n}$ అని చూపండి.

$\mathbf{t}''' = -2kk'\,\mathbf{t} - k^3\mathbf{n} + k''\mathbf{n} + k'\,(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) + (\tau k)'\,\mathbf{b} - \tau\,(\tau k)\,\mathbf{n}$ అవుతాయి.

కావున

(i) $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}'' = kk'$

(ii) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}''' = k\,(k'' - k^3 - k\tau^2)$

(iii) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}''' = -\,3kk'$

(iv) $\mathbf{t}'' \cdot \mathbf{t}''' = 3k^3k' + k'\,(-k^3 + k'' - k\tau^2) + k\tau\,(2k'\tau + k\tau')$

$= k'k'' + 2k^3k' + k^2\,\tau\tau' + kk'\,\tau^2$ మరియు

(v) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}'' = -\,k^2$ అవుతుంది.

ఉదా 19 : (s) దృష్ట్యా r యొక్క n వ అవకలజము $\mathbf{r}_n = a_n\mathbf{t} + b_n\mathbf{n} + c_n\mathbf{b}$ అయిన

$a_{n+1} = a_{n1} - kb_n$, $b_{n+1} = b_{n1} + ka_n - \tau c_n$, $c_{n+1} = c_{n1} + \tau b_n$ అని చూపండి.

i, j, k దృష్ట్యా $\mathbf{r} = (x, y, z)$ అయిన $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ కాని $\mathbf{r}_n = a_n\mathbf{t} + b_n\mathbf{n} + c_n\mathbf{b}$ కావున

$\mathbf{r}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (a_n\mathbf{t})' + (b_n\mathbf{n})' + (c_n\mathbf{b})'$

$= (a_{n1} - kb_n)\,\mathbf{t} + (ka_n - \tau c_n + b_{n1})\,\mathbf{n} + (c_{n1} + \tau b_n)\,\mathbf{b}$

$= a_{n+1}\,\mathbf{t} + b_{n+1}\,\mathbf{n} + c_{n+1}\,\mathbf{b}$ అయిన మనకు కావలసిన ఫలితాలు వస్తాయి.

ఉదా 20 : $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = f(\theta)$ సమతల వక్రమును సూచిస్తే $f(\theta)$ కనుగొనండి.

$\mathbf{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, f(\theta)) \Rightarrow \mathbf{r}' = (-a\sin\theta, a\cos\theta, f'(\theta))$ మరియు

$\mathbf{r}'' = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, f''(\theta))$;

$\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' = \left(a(\cos\theta\, f'' + \sin\theta\, f'), a(\sin\theta\, f'' - \cos\theta\, f'), a^2\right) \parallel \mathbf{b}$

సమతల వక్రమునకు

$\mathbf{b}' = 0 \Rightarrow \cos\theta\, f''' + \cos\theta f' = 0, \sin\theta\, f''' + \sin\theta f' = 0$ లేక

$f''' + f' = 0$ కనుక $f(\theta) = c_1 (c_2 \cos\theta + c_3 \sin\theta)$ అవుతుంది.

ఉదా 21 : ఒక వక్రమునకు $\tau \neq 0$ అయిన దాని రెండు సామీప్య బిందువుల వద్ద గీయబడి ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఖండించుకొనవని చూపండి.

వక్రముపై $P(\mathbf{r})$, $Q(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ అను రెండు సామీప్య బిందువుల వద్ద గీసిన ప్రధాన అభిలంబ రేఖలు $\mathbf{n}, \mathbf{n} + \delta\mathbf{n}$ అయిన ఇది ఖండించుకొనుటకు

$|\mathbf{n}.\ \mathbf{n} + \delta\mathbf{n}, \delta\mathbf{r}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{n}\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{r}| = 0$

$\Rightarrow |\mathbf{n}\,\mathbf{n}'\,\mathbf{r}'| = 0 \Rightarrow |\mathbf{n}, (\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}), \mathbf{t}| = 0 \Rightarrow \tau\,[\mathbf{nbt}]$ కావలెను.

$[\mathbf{tnb}] \neq 0$ కావున $\tau = 0$ కావలెను. లేక

$\tau \neq 0$ అయిన సామీప్యబిందువుల వద్ద గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఖండించుకొనవు.

2.13 వలనాక్షములు **:** O స్థిర బిందువుగా కల ధృఢవస్తువును తీసికొని O వద్ద ఆ వస్తువులో సంబంధము కలిగి ఉండిన సవ్యత్రికమును ప్రయోగించిన వస్తువుపై బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ అవుతుంది. P ధృఢవస్తువుపై బిందువు కావున ఆ వస్తువు భ్రమణము చెందినప్పుడు P యొక్క నిరూపకములలో మార్పు ఉండదు.

P యొక్క వేగము $= \mathbf{v} = \mathbf{r}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}'$ —— (1)

అవుతుంది. అనగ v సంపూర్ణముగ $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}', \left(' = \frac{d}{dt}, t \text{ కాలము}\right)$ లచే నిర్ధారింపబడుతుంది. ఒక ధృఢవస్తువు యొక్క గమనము, దాని ఇక బిందువు స్థిరముగ ఉన్నప్పుడు; ఆ స్థిరబిందువు ద్వార పోవు అక్షము (తక్షణ (instantaneous) భ్రమణాక్షము) దృష్ట్యా కోణీయ వేగము యొక్క భ్రమణము (తక్షణ (instantaneous) భ్రమణ సదిశ) చే సూచింపబడుతుంది.

$\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r}$ అవుతుంది.

(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) బిందువులకు

$\mathbf{i}' = \omega \wedge \mathbf{i} = \omega_3\mathbf{j} - \omega_2\mathbf{k}, \mathbf{j}' = -\omega_3\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k}, \mathbf{k}' = \omega_2\mathbf{i} - \omega_1\mathbf{j}$ లేక

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad \text{—— (2) అవుతుంది.}$$

శుద్ధగతిశాస్త్ర వివరణము :

బిందువు P వక్రముపై యూనిట్ వేగము $\left(\frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow s = t\right)$ చలించిన స్థిరబిందువు O వద్ద $F(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ని ప్రవేశపెట్టిన

$\mathbf{t}' = \omega_3\mathbf{n} - \omega_2\mathbf{b}, \mathbf{n}' = -\omega_3\mathbf{t} + \omega_1\mathbf{b}, \mathbf{b}' = \omega_2\mathbf{t} - \omega_1\mathbf{n}$ లేక

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{—— (3) అవుతుంది.}$$

ఈ ఫలితములను ఫ్రెనెట్ సెర్రెట్ సూత్రములతో పోల్చిన $\omega_1 = \tau, \omega_2 = 0, \omega_3 = k$ లేక ω డార్బొక్స్ సదిశ అవుతుంది. దీని ద్వారా τ, kల జ్యామితీయ ప్రాముఖ్యత ధృఢవస్తు చలనములో వాటి నిశ్చరత ప్రతిపాదింపబడినది.

సూచన : వక్రముపై చలన బిందువు P వద్ద $F(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ప్రవేశపెట్టిన ట్రై హెడ్రన్ యొక్క తక్షణచలనము సమాంతర పరివర్తనము $\mathbf{t}$ చే భ్రమణ పరివర్తనము $\mathbf{b}$ చే సూచింపబడుతుంది.

2.14.1 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ వక్రము యొక్క వక్రత విమోటనములు :

మొదటి పద్ధతి : వక్రముపై ఒక సదిశ $\mathbf{R}$కు $\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{R}'\dot{s}$ అవుతుంది. కావు

$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{s} \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}'$ లేక

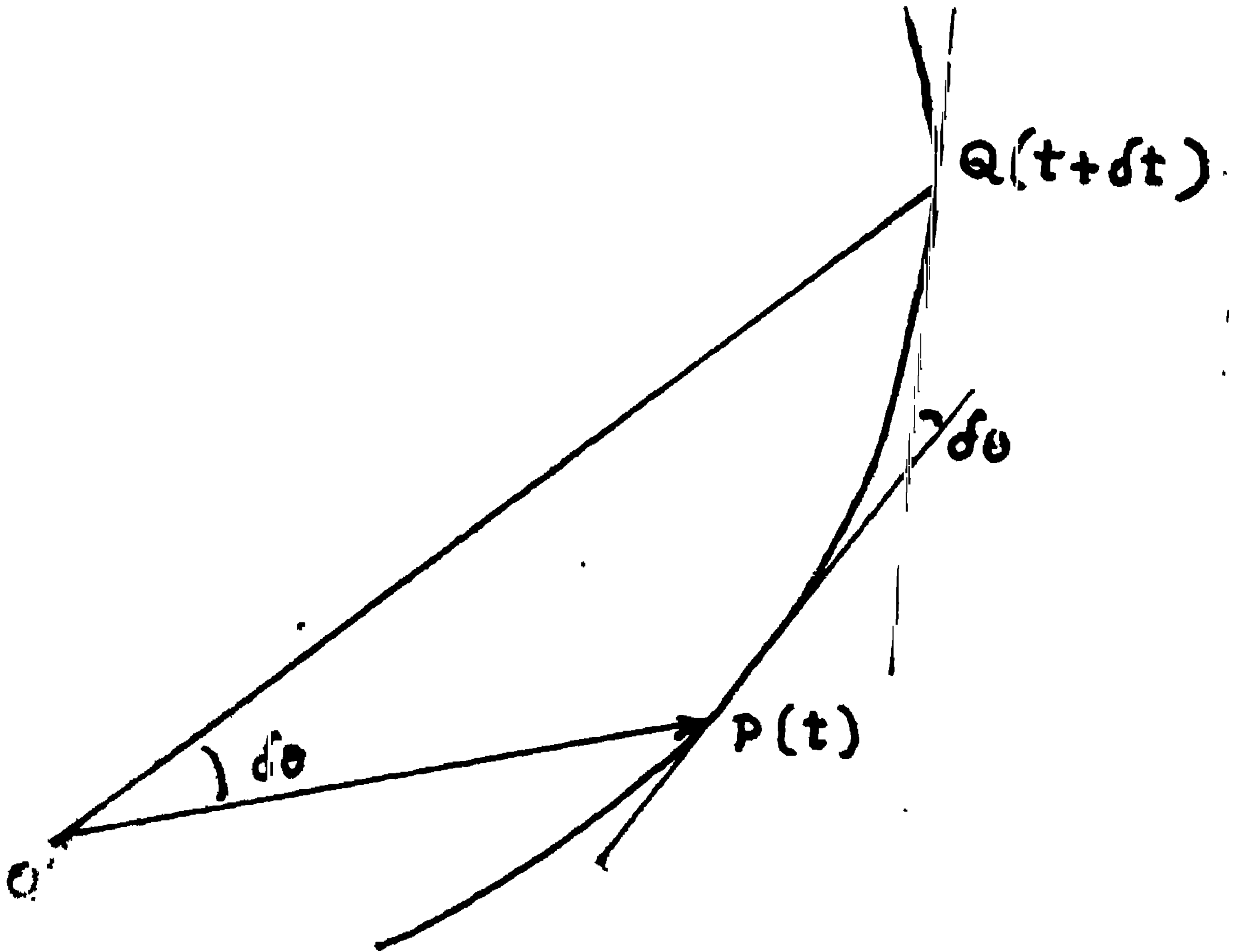
$\dot{\mathbf{t}} = k\dot{s}\mathbf{n},\ \dot{\mathbf{n}} = (\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})\dot{s},\ \dot{\mathbf{b}} = -\tau\dot{s}\mathbf{n}$ (ఫ్రెనెట్ సూత్రములు)

$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}\ddot{s} + (k\mathbf{n}\dot{s})\dot{s} = \ddot{s}\mathbf{t} + k\dot{s}^2\mathbf{n},$

$\dddot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}\dddot{s} + k\dot{s}\ddot{s}\mathbf{n} + 2k\dot{s}\ddot{s}\mathbf{n} + k\dot{s}^2(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})\dot{s} + \dot{k}\dot{s}^2\mathbf{n}$ అవుతాయి.

$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = k\dot{s}^3\mathbf{b},\ \dddot{\mathbf{r}} = (\dddot{s} - k^2\dot{s}^3)\mathbf{t} + (3k\dot{s}\ddot{s} + \dot{k}\dot{s}^2)\mathbf{n} + k\tau\dot{s}^3\mathbf{b}.$

కావున $[\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}] = k^2\tau\dot{s}^6$ అవుతుంది.



పటము - 2.10

$$\Rightarrow k = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}{\dot{s}^3} \text{ లేక } \frac{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}^3|} \quad \left(|\mathbf{r}'| = 1 \text{ కావున}\right) \text{ మరియు}$$

$$\tau = \frac{[\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}]}{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|^2} \text{ అవుతుంది.}$$

రెండవ పద్ధతి : వక్రముపై P(t), Q(t + δt)లు రెండు సామీప్య బిందువులు మరియు వీటి వద్ద వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము $\delta\theta$ $(0 < \delta\theta < \pi)$ అయిన

$$\sin\delta\theta = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|\ |\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)|} \Rightarrow \frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge (\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) - \mathbf{r}(t))}{\delta t\,|\dot{\mathbf{r}}(t)|\ |\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)|}$$

$$\delta t \to 0 \text{ అయిన } \theta = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} \text{ అవుతుంది.}$$

$$\text{కాని } k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{s}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3};$$

P, Qల వద్ద గీసిన ఉపాభిలంబరేఖలు

$\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t)$; $\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)$ లకు సమాంతరము కావున వాటి మధ్యకోణము $\delta\psi$

అయిన

$$\sin\delta\psi = \frac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t)) \wedge (\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t))}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t)|\ |\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)|}$$

$$= \frac{[\dot{\mathbf{r}}(t)\,\ddot{\mathbf{r}}(t)\,\ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)]\,\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) - [\dot{\mathbf{r}}(t)\,\ddot{\mathbf{r}}(t)\,\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)]\,\ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)}{\text{హారము}}$$

$$\therefore \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\delta\psi}{\delta\psi} \cdot \frac{\delta\psi}{\delta t}$$

$$\underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} = [\dot{\mathbf{r}}(t)\,\ddot{\mathbf{r}}(t)\ \{\ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t) - \ddot{\mathbf{r}}(t)\}]\,\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t)$$

$$= \frac{-\ \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \{\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t)\} \wedge \dot{\mathbf{r}}(t)\ \ \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)}{\delta t\,|\dot{\mathbf{r}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t|\ |\dot{\mathbf{r}}(t+\delta t) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(t+\delta t)|\,)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \frac{[\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r}]\dot{r}}{|\dot{r} \wedge \ddot{r}|^2} \text{ లేక}$$

$$\tau = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{s}} = \frac{[\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r}]}{|\dot{r} \wedge \ddot{r}^2} \text{ అవుతుంది.}$$

అట్లే $k^2 \tau = \frac{[\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r}]}{|\dot{r}|^6}$ అవుతుంది.

సూచన : వక్రసమీకరణము వక్రచాపము (s)లో ఇవ్వబడిన పరామితి

$t = s \Rightarrow \dot{s} = s' = 1$ అవుతుంది కావున

$k = |r' \wedge r''|$, $\tau = \frac{[r'\ r''\ r''']}{|r' \wedge r''|^2}$ మరియు $r''' = -k^2 t + k'n + k\tau b$

$\Rightarrow r'''^2 = k^4 + k'^2 + k^2 \tau^2$ లేక

$\tau^2 = \frac{r'''^2}{k^2} - k^2 - \left(\frac{k'}{k}\right)^2$ అవుతుంది.

ఈ ఫలితాలను వేరుగ తరువాతి పేరా 2.14.2 లో కనుగొంటాము.

కార్టీజియన్ నిరూపకములలో

$r = (x, y, z), \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \ddot{r} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ మరియు $\dddot{r} = (\dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z})$ కావున

$$k^2 = \frac{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3} \text{ మరియు}$$

$$\tau = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} \div \left[k^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3\right] \text{ అవుతుంది.}$$

2.14.2 $r = r(s)$ వక్రమునకు వక్రత, వివోటనములు :

$r' = t, r'' = kn, r''' = k'n + k(\tau b - kt)$ అవుతాయి కావున

$k = |r''|, r' \wedge r'' = kb, [r'\ r''\ r'''] = k^2\tau$

$$\Rightarrow \quad k = |r' \wedge r''|, \tau = \frac{[r'\, r''\, r''']}{r' \wedge r''^{\,2}}$$ అవుతాయి.

ఉదా 22 : $x = 2abt, y = a^2 \log t, z = b^2t^2$ అను వక్రమునకు వక్రత, విమోటనములు సమానమని చూపండి.

$$r = (2abt, a^2 \log t, b^2t^2)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \left(2ab, \frac{a^2}{t}, 2b^2t\right), \ddot{r} = \left(0, \frac{-a^2}{t^2}, 2b^2\right), \dddot{r} = \left(0, \frac{2a^2}{t^3}, 0\right)$$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow \dot{r} \wedge \ddot{r} = \left(\frac{4a^2b^2}{t}, -rab^3, \frac{-2a^3b}{t^2}\right)$$ మరియు

$$[\dot{r}\, \ddot{r}\, \dddot{r}] = \frac{-8a^3b^3}{t^3}$$ కాపున

$$k = \frac{|\dot{r} \wedge \ddot{r}|}{|\dot{r}^3|} = \frac{2abt}{(a^2 + 2b^2t^2)}$$ మరియు

$$|\tau| = \frac{[\dot{r}\, \ddot{r}\, \dddot{r}]}{k^2\, |\dot{r}|^6} = \frac{2abt}{(a^2 + 2b^2t^2)}$$

అవుతాయి కాపున $k = \tau$.

ఉదా 23 : $y = x \tan t$ అయినప్పుడు $x^2 + y^2 = z^2, z = a \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ల ఛేదన వక్రమునకు ఖండన బిందువు వద్ద వక్రత కనుగొనండి.

$y = x \tan t \Rightarrow$ వక్రము $z = at, x = at \cos t, y = at \sin t$ అవుతుంది.

$$r = (at \cos t, at \sin t, at) \Rightarrow \dot{r} = (a (\cos t - t \sin t), a (\sin t + t \cot), a)$$

$$\ddot{r} = (a (-2 \sin t - t \cos t), a (2 \cos t - t \sin t), 0)$$ అవుతాయి కాపున

$$\dot{r} \wedge \ddot{r} = \left(a^2 (t \sin t - 2 \cos t), - a^2 (2 \sin t + t \cos t), (2 + t^2)\, a^2\right),$$

$$\dot{r}^2 = 2a^2 + a^2t^2$$ మరియు

$$|\dot{r} \wedge \ddot{r}| = a^2 (t^4 + 5t^2 + 8)^{1/2}$$ అవుతాయి కాపున

$$k = \left[\frac{t^4 + 5t^2 + 8}{(t^2 + 2)^3}\right]^{1/2}$$ అవుతుంది.

ఉదా 24 : ఒక వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖపై స్పర్శబిందువు నుండి (c) దూరములో Q అను బిందువు కలదు. Q యొక్క బిందు పథము యొక్క వక్రత కనుగొనండి.

Qకు సంబంధించిన రాశులను, 1 పాదికతో సూచిస్తే $r_1 = r + ct$,

$$r_1' = \frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = t_1 \frac{ds_1}{ds} = t + ckn$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + c^2k^2 \text{ లేక } t_1\sqrt{1 + c^2k^2} = t + ckn \text{ అవుతుంది.}$$

ఈ సమీకరణమును (s) దృష్ట్యా అవకలనము చేస్తే

$$\left(k_1 n_1 \sqrt{1 + c^2k^2}\right)\frac{ds_1}{ds} + \frac{t_1 c^2 kk'}{\sqrt{1 + c^2k^2}} = kn + ck^1 n + ck(\tau b - kt)$$

అవుతుంది. పరిమాణములు వ్రాస్తే

$$k_1^2 (1 + c^2k^2)^2 + \frac{c^4 k^2 k^{1^2}}{(1 + c^2 k^2)} = c^2 k^4 + (k + ck')^2 + c^2k^2\tau^2 \text{ లేక}$$

$$k_1^2 (1 + c^2k^2)^3 = c^2k^2\tau^2 (1 + c^2k^2) + (k + ck^1 + c^2 k^3)^2$$

అవుతుంది. ఇది Q యొక్క బిందుపథము యొక్క వక్రత k_1 ను తెలియచేస్తుంది.

ఉదా 25 : $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 - y^2 = az$ల ఛేదన వక్రమునకు వక్రత, వివోటనములు కనుగొనండి.

ఈ వక్రము యొక్క పరామితీయ సమీకరణము

$x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \cos 2t$ కావున

$r = (a \cos t, a \sin t, a \cos 2t) \Rightarrow \dot{r} = (-a \sin t, a \cos t, -2a \sin 2t)$

$\ddot{r} = (-a \cos t, -a \sin t, -4a \cos 2t)$ మరియు

$\dddot{r} = (a \sin t, -a \cos t, 8a \sin 2t)$

$\Rightarrow \dot{r} \wedge \ddot{r} =$

$= (-2a^2 (2 \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t), -2a^2 (-\sin 2t \cos t + 2 \cos 2t + \sin t + a^2)$

$\dot{r}^2 = a^2(1 + 4\sin^2 2t)$, $[\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r}] = 6a^3 \sin 2t$

$\therefore\ k = \frac{1}{a}\left[\frac{5 + 12\cos^2 2t}{(1 + 4\sin^2 2t)^3}\right]^{1/2}, \tau = \frac{6\sin 2t}{a(5 + 12\cos^2 2t)}$ అవుతాయి.

2.15 రెండు ఉపరితలముల ఛేదన వక్రమునకు వక్రత, వ్యావర్తనములు :

$f(r) = 0$, $g(r) = 0$లు రెండు ఉపరితలములు, వాటి ఛేదన వక్రమునకు యూనిట్ స్పర్శరేఖ $t\,(= r')$ ఆ ఉపరితలముల అభిలంబరేఖలకు లంబము అవుతుంది కావున $t \cdot \nabla f = 0$, $t \cdot \nabla g = 0 \Rightarrow t \,||\, \nabla f \wedge \nabla g$

$\Rightarrow\ \nabla f \wedge \nabla g = \lambda t = h$ అనుకుందాము. —— (1)

$\Rightarrow h = \left((f_y g_z - f_z g_y), (f_z g_x - f_x g_z), (f_x g_y - f_y g_x)\right) = (h_1, h_2, h_3)$

కావున $\lambda = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_1^2}$.

సమీకరణము (1)ని దృష్ట్యా అవకలనము చేస్తే $h' = \lambda' t + \lambda k n$ —— (2)

$\Rightarrow h \wedge h' = \lambda^2 k\, b = H$ అనుకుందాము. —— (3)

$\Rightarrow \lambda^4 k^2 = H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ —— (4)

సమీకరణము (3)ను s దృష్ట్యా అవకలనము చేస్తే

$(\lambda^2 k)' b - \lambda^2 k \tau n = H'$ —— (5)

(2), (5)ల అదిశ లబ్ధము

$-\lambda^3 k^2 \tau = h' \cdot H' = h_1' H_1 + h_2' H_2' + h_3' H_3'$ —— (6)

సమీకరణములు (4), (6) ల నుండి k, τలను కనుగొనవచ్చును.

సూచన :

1. వక్రమును పరామితీయ రూపములో వ్యక్తపరచ వీలు కానపుడే ఈ పద్ధతిని పాటిస్తాము.
2. ఈ ఫలితాలనే $\Delta = h\frac{d}{ds} = h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y} + h_3\frac{\partial}{\partial z}$ ను ఉపయోగించి కూడ కనుగొనవచ్చు. కాని అది సులభ పద్ధతికాదు.

ఈ పద్ధతినుపయోగించి ఉదా. 25 ను చేయండి.

ఉదా 25 : $f = x^2 + y^2 - a^2 = 0, g = x^2 - y^2 - az = 0$ $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\Rightarrow \nabla f = (2x, 2y, 0), \nabla g = (2x, -2y, -a)$$

$$\Rightarrow \nabla f \wedge \nabla g = (-2ay, 2ax, -8xy) = (\lambda x^1, \lambda y^1, \lambda z^1) = \lambda t \qquad \text{—— (1)}$$

కావున $\lambda^2 = 4a^2(x^2 + y^2) + 64x^2y^2$

$$\Rightarrow \lambda^1 t + \lambda k n = (-2ay^1, 2ax^1, -8(xy^2 + x^1 y)) \qquad \text{—— (2)}; \quad \begin{aligned} \lambda x &= -2ay, \\ \lambda y &= 2ax, \\ \lambda z &= -8xy, \end{aligned}$$

(1) ∧ (2)

$$\Rightarrow \lambda^2 kb = \left(\frac{-32a^2x^3}{\lambda}, \frac{32\,a^2y^3}{\lambda}, \frac{8a^3(x^2 + y^2)}{\lambda}\right)$$

లేక $\dfrac{\lambda^3 kb}{8a^2} = (-4x^3, 4y^3, a(x^2 + y^2))$ —— (3)

సమీకరణము (3)ను (s) దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$\left(\frac{\lambda^3 k}{8a^2}\right)^1 b - \frac{\lambda^3 k\tau}{8a^2} n = \left(\frac{24\,ax^2y}{\lambda}, \frac{24\,axy^2}{\lambda}, 0\right) \qquad \text{—— (4)}$$

అవుతుంది.

సమీకరణము (3) నుండి

$$k^2 = 64\,a^4 \frac{\left[16x^6 + 16y^6 + a^2(x^2 + y^2)^2\right]}{\left[4a^2(x^2 + y^2) + 64x^2y^2\right]^3}$$

(2) · (4)

$$\Rightarrow \frac{\lambda^4 k^2 \tau}{8a^2} = \frac{96\,a^3xy(x^2 + y^2)}{\lambda^2} \text{ లేక}$$

$$\tau = \frac{12\,axy\,(x^2 + y^2)}{16(x^6 + y^6) + a^2(x^2 + y^2)^2} \text{ అవుతుంది.}$$

ఉదా 26 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $a^1x^2 + b^1y^2 + c^1z^2 = 1$ అను 2-వ పరిమాణపు ఉపరితలముం ఛేదన వక్రమునకు వక్రత, వివోటనములు కనుగొనండి.

$$f \equiv \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1) = 0, g = \frac{1}{2}(a^1x^2 + b^1y^2 + c^1z^2 - 1) = 0 \text{ అనుకొనిన}$$

$$\nabla f = (ax, by, ca), \nabla g = (a^1x, b^1y, c^1z);$$

$$\Rightarrow h = \lambda t = \lambda r^{I} \,||\, \nabla f \wedge \nabla g = (Ayz, Bzx, Cxy)$$

$$\Rightarrow \lambda r^{I} = \left(\frac{A}{x}, \frac{B}{y}, \frac{C}{z}\right) \qquad \text{—— (1)}$$

$A = bc^{I} - b^{I}c, B = ca^{I} - c^{I}a, C = ab^{I} - a^{I}b$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow \lambda r^{1} = (\lambda x^{I}, \lambda y^{I}, \lambda z^{1}) = \left(\frac{A}{x}, \frac{B}{y}, \frac{C}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{A}{x}\right)^2 + \left(\frac{B}{y}\right)^2 + \left(\frac{C}{z}\right)^2 \qquad \text{—— (2)}$$

సమీకరణము (1)ని (s) దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$\lambda^{I}t + \lambda kn = \left(\frac{-A^2}{\lambda x^3}, \frac{-B^2}{\lambda y^3}, \frac{-C^2}{\lambda z^3}\right) \text{ అవుతుంది.} \qquad \text{—— (3)}$$

(1), (3) ల వజ్ర లబ్ధము వ్రాస్తే

$$\lambda^3 kb = \left(\frac{BC}{y^3z^3}(Bz^2 - Cy^2), \frac{CA}{z^3\ x^3}(Cx^2 - Az^2), \frac{AB}{x^3\ y^3}(Ay^2 - Bx^2)\right)$$

అవుతుంది.

$$Bz^2 - Cy^2 = (ca^{I} - c^{I}a)\, Z^2 - (ab^{I} - a^2b)\, y^2$$

$$= -a\,(c^{I}z^2 + b^{I}y^2) + a^{I}\,(cz^2 + by^2) = -a\,(1 - a^2x^2) + a^2\,(1 - ax^2)$$

$$= a^{I} - a$$

అవుతుంది కావున

$$\lambda^3 kb = \frac{ABC}{x^3y^3z^3}\left(\frac{(a^{I} - a)\, x^3}{A}, \frac{(b^{I} - b)\, y^3}{B}, \frac{(c^{I} - c)\, z^3}{C}\right) \qquad \text{—— (4)}$$

లేక $\dfrac{x^3y^3z^3}{ABC}\lambda^3\, kb = (A^{I}x^3, B^{I}y^3, C^{I}z^3);$

$$(AA^{I} = a^{I} - a, BB^{I} = b^{I} - b, CC^{I} = c^{I} - c) \qquad \text{—— (5) అవుతుంది.}$$

సమీకరణము (5)ను (s) దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$\left(\frac{x^3y^3z^3}{ABC}\lambda^3 k\right)^{1} b - \left(\tau\frac{x^3y^3z^3}{ABC}\lambda^3 k\right) n = \left(\frac{3AA^{I}x}{\lambda}, \frac{3BB^{I}y}{\lambda}, \frac{3CC^{I}z}{\lambda}\right) \qquad \text{—— (6)}$$

వస్తుంది

(3) · (6)

$$\Rightarrow \frac{\lambda^6 k^2 \tau x^3 y^3 z^3}{ABC} = 3\left[\frac{A^2(a^1 - a)}{x^2} + \frac{B^2(b^1 - b)}{y^2} + \frac{C^2(c' - c)}{z^2}\right] \quad \text{—— (7)}$$

అవుతుంది.

సమీకరణములు (4), (7) ల నుండి

$$\tau = \frac{3x^3y^3z^3}{ABC} \frac{\sum \frac{A^2(a'-a)}{x^2}}{\sum \frac{(a'-a)^2 x^6}{A^2}}$$ మరియు

$$k^2 = \frac{A^2 B^2 C^2}{x^6 y^6 z^6} \frac{\sum \frac{(a'-a)^2 x^6}{A^2}}{\left(\sum \frac{A^2}{x^2}\right)^3}$$ అవుతుంది.

2.16 స్థిరవాలు కలిగిన వక్రములు (స్థూప ఉపరితలముపై గీసిన కుండలినులు) :

ఒక స్థూప ఉపరితలముపై గీయబడిన స్థిరరేఖ (జనకరేఖ - అక్షము) తో స్థిరకోణము చేయు వక్రము కుండలిని అవుతుంది.

ఒక వక్రము కుండలిని అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\frac{\tau}{k}$ = స్థిరరాశి.

ఆవశ్యకత : స్థూపము యొక్క అక్షము వెంబడి సదిశ **a** అయిన a = 1 అయినప్పుడు

$\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \cos\alpha \Rightarrow \mathbf{t}' \cdot a = k(\mathbf{n} \cdot a) = 0;$

k = 0 అనగ వక్రము సరళరేఖ అయినప్పుడు ఈ ప్రతిపాదన వర్తిస్తుంది.

$k \neq 0$ అయిన $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ లేక **a** || వక్రము యొక్క చాపకలనీయ తలము కావున **a**ను **t**, **b**ల రేఖీయ సమాసము $\cos\alpha\, \mathbf{t} + \sin\alpha\, \mathbf{b}$ గ వ్రాయవచ్చు.

$(k\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \frac{k}{\tau} = \tan\alpha$ (స్థిరరాశి) అవుతుంది.

పర్యాప్తము : $\frac{k}{\tau} = \tan\alpha$ అనుకొనిన ఫ్రెనెట్ సూత్రములనుండి

$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{t}'\tau + \mathbf{b}'k = 0 \Rightarrow \mathbf{t}'\cos\alpha + \mathbf{b}'\sin\alpha = 0$

సమాకలనము చేస్తే

$\mathbf{t}\cos\alpha + \mathbf{b}\sin\alpha = \mathbf{c}$; $\mathbf{t}$ తో అదిశ లబ్దము $\mathbf{t}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$. అనగ వక్రము స్థిరదిశతో స్థిరకోణము చేస్తుంది.

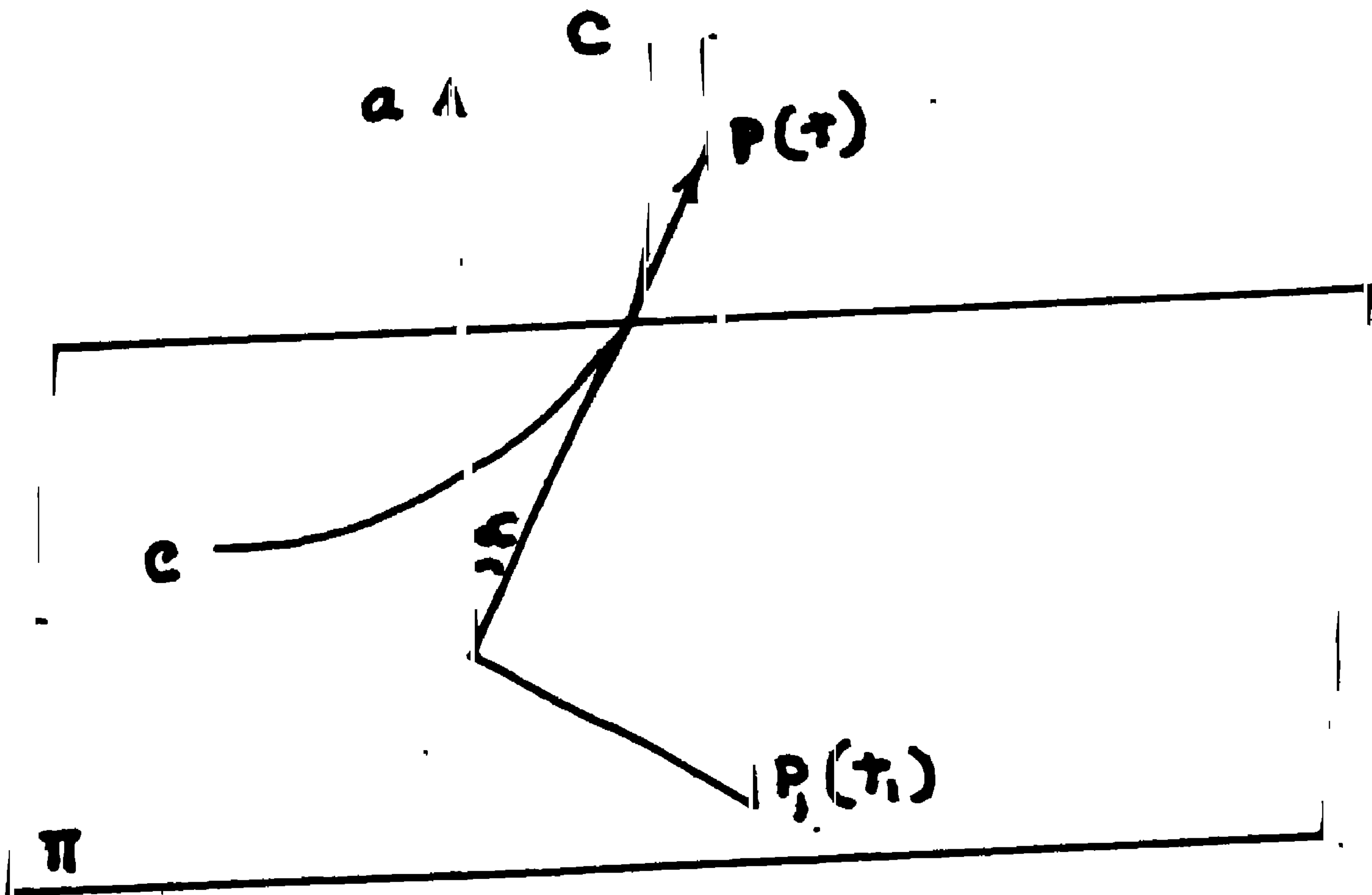
సూచన : $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = 0 \Rightarrow$ వక్రము యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద ప్రధాన అభిలంబరేఖ స్థూపమునకు లంబముగ ఉంటుంది.

2.16.1 వృత్తాకార (వర్తుల) కుండలిని :

$x^2 + y^2 = a^2$ ఆధారము కల లంబ స్థూపముపై గీయబడిన, జనకరేఖతో స్థిరకోణము ఏర్పరచు, వక్రమును (లంబ) వర్తుల కుండలిని అంటాము.

2.17 స్థూపముపై గీయబడిన వక్రముల వాలు వక్రత – లంబవక్రతలు :

ఒక స్థూపముపై జనకరేఖతో స్థిరకోణము α ఏర్పరచు వక్రము (కుండలిని) కి (i) $k_1 = k\,\text{cosec}^2\,\alpha$, $\tau = k_1 \sin\alpha\cos\alpha$ బిందువు P వద్ద వక్రము యొక్క వక్రత k, ఆ బిందువు ద్వార పోవు స్థూపము యొక్క లంబఛేదనము వక్రత k_1. మరియు (ii) k, τలు స్థిరరాశులుగా కల వక్రము వర్తుల కుండలిని మాత్రమే అవుతుంది.



పటము 2.11

స్థూపము యొక్క అక్షము వెంబడి యూనిట్ సదిశ a అయిన కుండలిని r(s)ను aకు లంబముగా కల సమతలము πలో విక్షేపపరిచిన πలో P(r) యొక్క విక్షేపము $P_1(r_1$ అవుతుంది.

$$r_1 = r - (r \cdot a)\, a \qquad \text{—— (1)}$$

$$\Rightarrow r_1{}^1 = r^1 - (r^1 \cdot a)\, a = t - a \cos\alpha \qquad \text{—— (2)}$$

$$\Rightarrow t_1 \frac{ds_1}{ds} = t - a\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + \cos^2\alpha - 2\,(a \cdot t)\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow ds_1 = \sin\alpha\, ds$$

కావున $t_1 = \operatorname{cosec}\alpha\, t - \cot\alpha\, a$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow k_1 = k_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = kn \operatorname{cosec}\alpha \Rightarrow n_1 = n$$ మరియు

$k_1 = k \operatorname{cosec}^2\alpha$ అవుతుంది.

కుండలిని వక్రమునకు $\frac{k}{\tau} = \tan\alpha$

కావున $\tau = k\cot\alpha$ లేక $k_1 \sin\alpha\cos\alpha$ అవుతుంది.

(ii) k, τలు స్థిరరాశులయిన $\frac{k}{\tau}$ స్థిరరాశి అవుతుంది కావున వక్రము కుండలిని అవుతుంది. స్థిరరాశి కావున $k_1 = k\operatorname{cosec}^2\alpha$ కూడ స్థిరరాశి అవుతుంది కావున వక్రము కలిగిన స్థూపము వృత్తాకార స్థూపము అవుతుంది.

ఉదా 27 : $3ac = \pm 2b^2$ అయినప్పుడు $r = (au, bu^2, cu^3)$ కుండలిని అవుతుంది.

$$r = (au, bu^2, cu^3) \Rightarrow \dot{r} = (a, 2bu, 3cu^2), \ddot{r} = (0, 2b, 6cu),$$

$$\dddot{r} = (0, 0, 6c)$$ మరియు

$$\dot{r} \wedge \ddot{r} = (6bcu^2, -6acu, 2ab); [\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r}] = 12abc$$ అవుతాయి.

కావున $k = \frac{|\dot{r} \wedge \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3} = 2\left[\frac{(9b^2c^2u^4 + 9a^2c^2u^2 + a^2b^2)}{(a^2 + 4b^2u^2 + 9c^2u^4)^3}\right]^{1/2}$ మరియు

$$\tau = \frac{[\dot{r}\,\ddot{r}\,\dddot{r}]}{|\dot{r}\wedge\ddot{r}|^2} = \frac{3abc}{9b^2c^2u^4 + 9a^2c^2u^2 + a^2b^2}$$ అవుతాయి.

$$\Rightarrow \frac{k}{\tau} = \frac{2}{3abc}\left[\frac{9b^2c^2u^4 + 9a^2c^2u^2 + a^2b^2}{9c^2u^4 + 4b^2u^2 + a^2}\right]^{3/2}$$

$3ac = \pm 2b^2$ లేక $9a^2c^2 = 4b^4$ అయినప్పుడు

$$\frac{k}{\tau} = \frac{2}{3abc}\left[\frac{9b^2c^2u^4 + 4b^4u^2 + a^2b^2}{9c^2u^4 + 4b^2u^2 + a^2}\right]^{3/2} = \frac{2b^2}{3ac},$$ స్థిరరాశి

కావున వక్రము కుండలినిని సూచిస్తుంది.

ఉదా 28 : $x = at^2$, $y = 2at$ అనుస్థూపముపై కుండలిని గీయబడిన దాని వక్రత, విమోటనములు కనుగొనండి.

మొదటి పద్ధతి : $r = (at^2, 2at, s\cos\alpha) \Rightarrow \dot{r} = t = (2at\,t', 2at', \cos\alpha)$

$$\Rightarrow 1 = (4a^2t^2 + 4a^2)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{\sin\alpha}{2a\sqrt{1+t^2}}$$

కావున $t = \left(\frac{\sin^2\alpha}{2a(1+t^2)^2}, \frac{-t\sin^2\alpha}{2a(1+t^2)^2}, 0\right) \Rightarrow k = \frac{\sin^2\alpha}{2a(1 = t^2)^{3/2}}$

ఇది కుండలిని వక్రము కావున $\frac{k}{\tau} = \tan\alpha$ లేక

$$\tau = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2a(1+t^2)^{3/2}}$$ అవుతాయి.

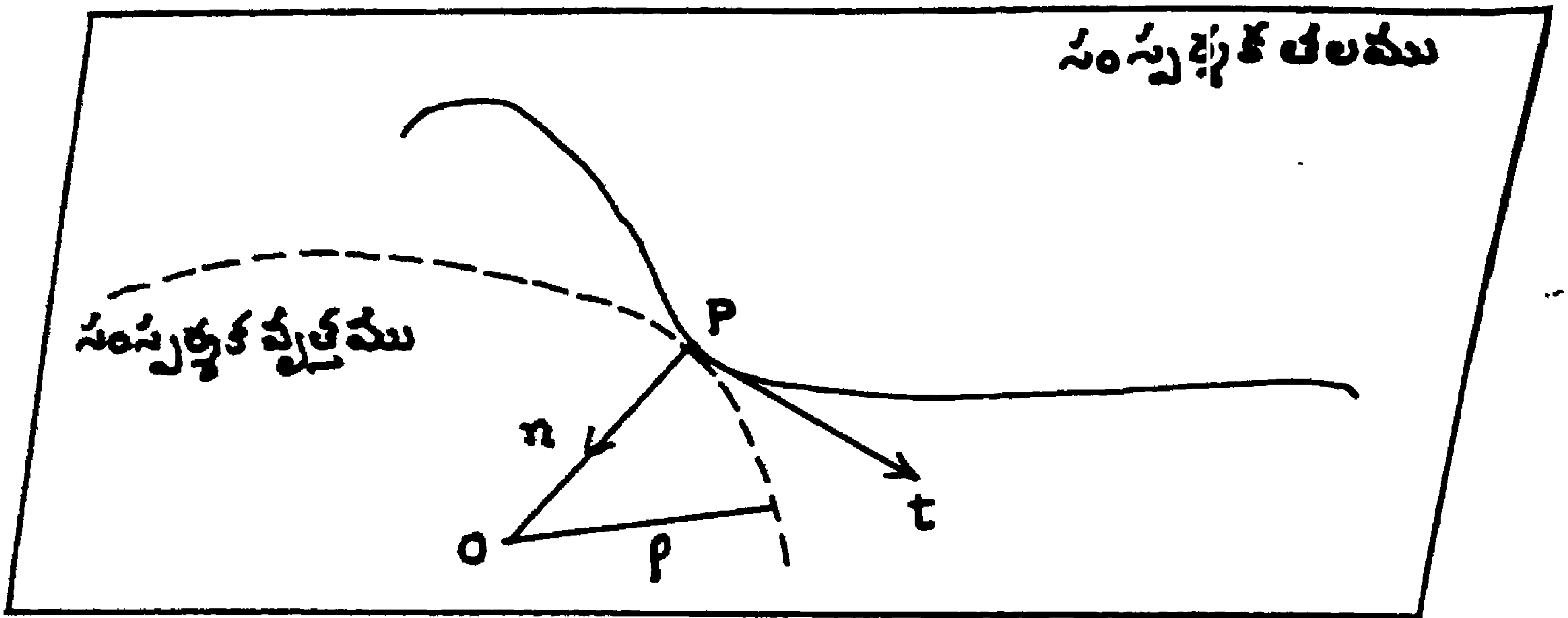
రెండవ పద్ధతి : ఈ స్థూపము యొక్క జనకరేఖలు || z - అక్షము కావున k_1 సమతల వక్రము యొక్క వక్రతను సూచిస్తుంది కావున

$$\rho_1 = \frac{(1+y^2)^{3/2}}{\cdots}, \rho = \rho_1\operatorname{cosec}^2\alpha, \sigma = \rho\tan\alpha$$

సూత్రములనుపయోగించి పై ఫలితములను సరిచూడవచ్చును.

2.18 వక్రత (సంస్పర్శక) వృత్తము :

అంతరాళములోని వక్రముపై (3) బిందువులు P, Q, R ల ద్వారా పోవు వృత్తం $Q, R \to P$ అయిన P వద్ద వక్రతావృత్తము అనబడుతుంది. ఈ వృత్తము సంస్పర్శ తలములో ఉంటుంది కావున దీనిని సంస్పర్శక వృత్తము అని కూడ అంటాము.



పటము - 2.12

కేంద్రము – వ్యాసార్ధము :

r generic బిందువు, **c** కేంద్రము, a వ్యాసార్ధముగను కల సంస్పర్శక తలములో వృత్తమును $|\mathbf{r}-\mathbf{c}| = a$ అనుగోళము, సంస్పర్శక తలముల ఛేదన వక్రముచే సూచించవచ్చును ఈ గోళము

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s), \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s), \mathbf{r} = \mathbf{r}_3(s)$ లచే సూచించబడు వక్రముపై బిందువుల ద్వారా పోతుంది కావున గోళము, వక్రము ఖండన బిందువులు

$\phi(s) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{c}].[\mathbf{r}(s) - \mathbf{c}]$ ను సాధిస్తే వస్తాయి.

ఈ గోళము వక్రమును (3) ఏకీభవించు బిందువులలో ఖండించుకుంటే

$\phi(s) = 0, \phi'(s) = 0, \phi''(s) = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{c})^2 = a^2, (\mathbf{r}-\mathbf{c}).\mathbf{r}' = 0, (\mathbf{r}-\mathbf{c}).\mathbf{r}'' + \mathbf{r}'.\mathbf{r}' = 0$

$\mathbf{r}' = \mathbf{t}, \mathbf{r}'' = k\mathbf{n}, \mathbf{r}'^2 = 1$

కావున పై నియమములు $(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2 = a^2, (\mathbf{r}-\mathbf{c}).\mathbf{t} = 0, (\mathbf{r}-\mathbf{c}).\mathbf{n} = -\rho$ అవుతాయి.

అనగా $\mathbf{r}-\mathbf{c}$ అభిలంబతలములో ఉంటుంది అట్లే సంస్పర్శక తలములో ఉంటుంది. కావున $\mathbf{r}-\mathbf{c}$ ప్రధాన అభిలంబరేఖ దిశలో ఉండి λn చే సూచించబడుతుంది.

$$(\mathbf{r}-\mathbf{c}).\mathbf{n} = -\rho \Rightarrow \lambda = -\rho \,;\, (\mathbf{r}-\mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 \Rightarrow a = \rho$$

కావున $\mathbf{c} = \mathbf{r} - \lambda\mathbf{n}$ లేక $\mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$ అవుతుంది.

$\mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$ వక్రతా కేంద్రమును, $\rho\left(=\frac{1}{k}\right)$ వక్రతా వ్యాసార్థమును సూచిస్తాయి.

అట్లే ఒక వక్రమునకు $\frac{1}{\tau} = \sigma$ ను విమోటన వ్యాసార్థము అంటాము.

వక్రతా కేంద్రము ప్రధాన అభిలంబరేఖపై వక్రము యొక్క P బిందువు నుండి ρ దూరములో ఉంటుంది. (పటము 9 చూడండి).

ధర్మములు :

(1) ఒక వక్రము యొక్క వక్రతా కేంద్రముల బిందు పథమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ ఆ వక్రము యొక్క అభిలంబతలములో ఉంటుంది.

వక్రము యొక్క వక్రతా కేంద్రము $\mathbf{c} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$ అవుతుంది కావున కేంద్రముల బిందుపథ వక్రమునకు

$$\mathbf{t}_1 = (\mathbf{r} + \rho\mathbf{n})' \frac{ds}{ds_1} = [\mathbf{t} + \rho'\,\mathbf{n} + \rho\,(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})\frac{ds}{ds_1} = (\rho'\,\mathbf{n} + \rho\tau\mathbf{b})\ \frac{ds}{ds_1}$$ అవుతుంది.

అనగా వక్రతా కేంద్రముల బిందు పథము యొక్క స్పర్శరేఖ ఆ వక్రము యొక్క అభిలంబతలములో ఉంటుంది. ఈ స్పర్శరేఖ $\mathbf{n}$ తో చేయుకోణము α అయిన $\tan\alpha = \frac{\rho\tau}{\rho'}$ అవుతుంది.

(2) స్థిరవక్రత కలిగిన వక్రము C అయిన దాని వక్రతా కేంద్రముల బిందుపథ వక్రము కూడ స్థిరవక్రతను కలిగి ఉంటుంది. దీని విమోటనము వక్ర విమోటనమునకు విలోమాను పాతములో ఉంటుంది.

ρ స్థిరరాశి అయిన $\rho' = 0$ అవుతుంది కావున

$$t_1 = \rho\tau b \frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = \rho\tau$$ మరియు

$$t_1 = b \Rightarrow k_1 n_1 = -\tau n \frac{ds}{ds_1} \Rightarrow n_1 \| n;$$

n దిశను $n_1 = -n$ అగునట్లు తీసికొనిన

$$k_1 = \frac{1}{\rho} = k$$ స్థిరరాశి

$$b_1 = t_1 \wedge n_1 = b_\wedge(-n) = t \Rightarrow -\tau_1 n_1 = kn \frac{ds}{ds_1}$$ లేక

$$\tau_1 = \frac{k^2}{\tau} \Rightarrow \tau_1 \propto \frac{1}{\tau}$$ అవుతుంది.

ఉదా 29 : సంస్పర్శక వృత్తమునకు దత్త వక్రముతో కనీసము 2 వ పరిమాణపు స్పర్శ వ్యవస్థిత మవుతుందని చూపండి.

సంస్పర్శక వృత్తము $|r - c| = \rho$ గోళము, $b = 0$ సమతలముల ఛేదన వక్రము అవుతుంది. దత్తవక్రము $r = r(s)$ అయిన

$$\phi(s) = (r(s) - c).(r(s) - c) - \rho^2 = 0.$$

వక్రతా కేంద్రము C, వక్రముపై బిందువు P(r) అయిన CP అభిలంబ తలములో ఉంటుంది.

$$\Rightarrow (r(s) - c).t = (r(s) - c).r' = 0 \Rightarrow \phi'(s) = 0$$

కావున సంస్పర్శక వృత్తము దత్త వక్రముతో కనీసము 2 వ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగి ఉంటుంది.

2.19 వక్రతా (సంస్పర్శక) గోళము :

ఇవ్వబడిన వక్రము యొక్క నాలుగు బిందువులు P, A, B, C ల ద్వారా పోవు గోళము A, B, C → P అయినప్పుడు P వద్ద వక్రమునకు గీయబడిన వక్రతా గోళము అవుతుంది.

కేంద్రము – వ్యాసార్థము :

S కేంద్రముగను, R వ్యాసార్థముగను కలగోళ సమీకరణము $|r - s| = R$ అవుతుంది కావున $r = r(s)$ వక్రముతో ఏర్పడు ఖండన బిందువులు $\phi(x) = (r - s)^2 - R^2 = 0$ యొక్క

మూలములచే సూచింపబడుతాయి. ఈ గోళము వక్రమును (4) ఏకీభవించు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది కావున

$\phi(\mathbf{s}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{s})^2 = R^2 ; \phi^1(\mathbf{s}) = (\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{r}' = 0$ లేక

$(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{t} = 0 \Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{s})$ అభిలంబతలములో ఉంటుంది.

$\phi''(\mathbf{s}) = (\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{r}'' + \mathbf{r}'.\mathbf{r}' = 0$

$\Rightarrow k(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{n} + 1 = 0$ లేక $(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{n} + \rho = 0$

మరియు $\phi'''(\mathbf{s}) = (\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{r}''' + 3\mathbf{r}'.\mathbf{r}'' = 0$

$\Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{s}).(k\mathbf{n})' + 3k(\mathbf{t}.\mathbf{n}) = 0$ (లేక $1' = 0$)

$\Rightarrow k'(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{n} + k(\mathbf{r}-\mathbf{s}).(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) = 0 ; (\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{t} = 0$

$\Rightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{s}).(k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow k\tau(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{b} = \frac{k}{k}$

లేక $(\mathbf{r}-\mathbf{s}).\mathbf{b} = \rho^2\sigma k'$ లేక $-\rho'\sigma$ అవుతుంది.

పటము - 2.13

$\mathbf{r}-\mathbf{s}$ అభిలంబతలములో ఉంటుంది కావున

$\mathbf{r}-\mathbf{s}=\lambda\mathbf{n}+\mu\mathbf{b}$ లేక $\mathbf{s}=\mathbf{r}-\lambda\mathbf{n}-\mu\mathbf{b}$

రూపములో ఉంటుంది. పై సమీకరణములనుండి $\lambda=-\rho,\ \mu=\rho^2\sigma k'$ అవుతుంది. కావున వక్రతా గోళకేంద్రము $\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}+\rho'\sigma\mathbf{b}$ మరియు వక్రతాగోళ వ్యాసార్ధము

$$R=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2\sigma^2} \text{ లేక } \frac{\sqrt{k^2\tau^2+k'^2}}{k^2\tau}$$

అవుతుంది. వక్రతా గోళ కేంద్రము అభిలంబతలములో ఉపాభిలంబరేఖకు సమాంతరరేఖ (ధృవాక్షము లేక వక్రతా వృత్తాక్షము) పైన ఉంటుంది.

సూచన : స్థిరవక్రత కలిగిన వక్రములకు $\rho'=0$ అవుతుంది కావున $\mathbf{s}=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$ అనగా వక్రతా వృత్తకేంద్రముతో వక్రతా గోళకేంద్రము ఏకీభవిస్తుంది.

ఉదా 30 : వక్రతా గోళ వ్యాసార్ధము $\dfrac{|\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}''|}{k^2\tau}$ అవుతుంది.

$$\frac{\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}''}{k^2\tau}=\frac{(\mathbf{t}\wedge(k\mathbf{n})')}{k^2\tau}=\frac{\mathbf{t}\wedge[k'\mathbf{n}+k(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})]}{k^2\tau}=\frac{k'\mathbf{b}-k\tau\mathbf{n}}{k^2\tau}$$

కావున $\dfrac{|\mathbf{t}\wedge\mathbf{t}''|}{k^2\tau}=\dfrac{\sqrt{k'^2+k^2\tau^2}}{k^2\tau^2}=R$ అవుతుంది.

ఉదా. 31. ఒక వక్రము యొక్క వక్రతా వృత్త కేంద్రము యొక్క బిందు పథవక్రము

$$\sqrt{\frac{\rho'^2\sigma^4}{\rho^2R^4}+\left[\frac{\rho^2\sigma}{R^3}\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma\rho'}{\rho}\right)-\frac{1}{R}\right]^2}$$

వక్రతకలిగి ఉంటుందని చూపండి. వక్రతా వృత్త కేంద్రము $\mathbf{c}=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$ పాదిక 1 చే వక్రవృత్తకేంద్రబిందు పథమునకు సంబంధించిన రాశులను సూచించిన

$$\mathbf{c}'=\frac{d\mathbf{c}}{ds_1}\cdot\frac{ds_1}{ds}=\mathbf{t}_1 s_1'=\mathbf{t}+\rho'\mathbf{n}+\rho(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})=\rho'\mathbf{n}+\rho\tau\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow s_1'=\sqrt{\rho'^2+\rho^2\tau^2}=\frac{R}{\sigma}.$$

నగా $\mathbf{t}_1=\dfrac{\sigma\rho'\mathbf{n}+\rho\mathbf{b}}{R}$ లేక $\dfrac{\rho}{R}\left(\mathbf{b}+\dfrac{\tau\rho'}{\rho}\mathbf{n}\right)$ అవుతుంది.

దీనిని $\frac{R}{\rho} t_1 = b + hn$ —— (1), $h = \frac{\sigma\rho'}{\rho}$ —— (2) గా వ్రాయవచ్చును.

$R^2 = \rho^2 + \rho'^2 \sigma^2$ లేక $\rho^2 (1 + h^2)$ —— (3) అవుతుంది.

$\Rightarrow \left(\frac{R}{\rho}\right)\left(\frac{R}{\rho}\right)' = hh^1$ లేక $\left(\frac{R}{\rho}\right)' = \frac{hh'\rho}{R}$ —— (4) అవుతుంది.

ఇప్పుడు సమీకరణము (1) ని s దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$\frac{R}{\rho} k_1 n_1 \frac{R}{\sigma} + \left(\frac{R}{\rho}\right)' t_1 = -\tau n + h' n + h(\tau b - kt)$$

లేక $\frac{k_1 R^2}{\rho\sigma} n_1 + \frac{hh'\rho}{R} t_1 = \sigma\frac{h}{\rho} t + \left(h' - \frac{1}{\sigma}\right) n + \frac{h}{\sigma} b$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow \frac{k_1^2 R^4}{\rho^2\sigma^2} + \frac{h^2 h_1^2 \rho^2}{h'^2} = \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(h' - \frac{1}{\sigma}\right)^2.$$

లేక $k_1^2 = \frac{\rho^2\sigma^2}{R^4}\left\{h'^2\left(1 - \frac{h^2\rho^2}{R^2}\right) - \frac{2h'}{\sigma} + \frac{(h^2+1)}{\sigma^2} + \frac{h^2}{\rho^2}\right\}$ లేక

$$= \frac{\rho^4\sigma^2}{R^6} h'^2 - \frac{2h'\sigma\rho^2}{R^4} + \frac{1}{R^2} + \frac{h^2\sigma^2}{R^4} \qquad (3) \text{ నుండి}$$

$$= \left(\frac{h'\rho^2\sigma}{R^3} - \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{\rho'^2\sigma^4}{\rho^2 R^4} \quad (2) \text{ నుండి అవుతుంది.}$$

ఉదా 32 : అంతరాళములోని వక్రమునకు ఒక బిందువు వద్ద గీయబడిన వక్రతా గోళకేంద్రము, వ్యాసార్ధములను కార్టీజియన్ నిరూపకములలో వ్రాయండి.

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{t} = (x', y', z'), \mathbf{r}'' = k\mathbf{n} = (x'', y'', z'')$$

$\Rightarrow k = \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^{1/2}$ మరియు $\mathbf{n} = \left(\frac{x''}{k}, \frac{y''}{k}, \frac{z''}{k}\right)$

కావున $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \left(\frac{y'z'' - z_1 y''}{k}, \frac{z'x'' - x'z''}{k}, \frac{x'y'' - y'x''}{k}\right)$;

$k' = \frac{x''x''' + y''y''' + z''z'''}{k}$ మరియు

$$|b'| = \tau = \left(\frac{k\,(y'z''' - z'y''') - (y'z'' - z'y'')\,k'}{k^2}, \frac{k\,(z'x''' - x'z''') - (z'x'' - x'z'')\,k'}{k^2}, \frac{k\,(x'y''' - y'x''') - (x'y'' - y'x'')\,k'}{k^2} \right)$$

లేక

$$\left(\frac{y'z''' - z'y'''}{k} - \frac{(y'z'' - z'y'')\,(x''x''' + y''y''' + z''z''')}{k^3}, \;\ldots, \;\ldots \right)$$

అవుతుంది.

కావున వక్రతాగోళ కేంద్రము x – నిరూపకము

$$x + \frac{\rho x''}{k} - \frac{k'}{k^3 \tau}\,(y'z'' - z'y'')$$

మరియు వక్రతా గోళ వ్యాసార్ధము

$$R = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4 \tau^2}}$$

$$= \left\{ \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^{-1} \left[1 + \frac{(x''x''' + y''y''' + z''z''')^2}{\left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^2 \tau^2} \right] \right\}^{1/2}$$

అవుతుంది.

ధర్మములు :

అంతరాళములోని వక్రము c యొక్క వక్రతా గోళ కేంద్రముల బిందు పథము c_1 అయిన

1) c_1 యొక్క స్పర్శరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖలు వరుసగ c యొక్క ఉపాభిలంబరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖ, స్పర్శరేఖలకు సమాంతరముగ ఉంటాయి.

2) c, c_1 ల వక్రతల లబ్ధము వాటి విమోటనముల లబ్ధమునకు సమానము మరియు

3) c యొక్క ప్రతిబిందువు c_1 యొక్క అనురూప బిందువు వద్ద గీయబడిన వక్రతా వృత్త కేంద్రము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము c స్థిరవక్రత కలిగి ఉండుట.

c_1 యొక్క జ్యామితీయ రాశులకు పాదిక 1 ఉపయోగించిన, వక్రతా గోళకేంద్రము

$\mathbf{S} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} + \sigma\rho'\mathbf{b}$ అవుతుంది.

ఇచ్చట $P(\mathbf{r})$ c పై బిందువు $P(\mathbf{r})$ కు c_1 అనురూపబిందువు $P_1(s)$ అయిన

$$\frac{d\mathbf{S}}{ds_1}\cdot\frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + \rho'\mathbf{n} + \rho(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) + (\rho'\sigma)'\mathbf{b} - \rho'\mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}_1 s_1' = [\rho\tau + (\rho'\sigma)']\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}_1 \| \mathbf{b} ; \frac{ds_1}{ds} = \rho\tau + (\rho'\sigma)'$$

c_1 యొక్క చాపమును $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{b}$ లు ఒకే దిశలో ఉండునట్లు తీసికొనిన $\mathbf{t}_1 = \mathbf{b}$ అవుతుంది.

$$k_1\mathbf{n}_1\frac{ds_1}{ds} = -\tau\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n}_1 \| \mathbf{n} ; k_1[\rho\tau + (\rho'\sigma)'] = \tau$$

అవుతుంది. ఇచట $\mathbf{n}_1$ దిశను $\mathbf{n}$ కు వ్యతిరేక దిశలో తీసికొనిన $k_1 = \tau\frac{ds}{ds_1}$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n}_1 = \mathbf{b}\wedge(-\mathbf{n}) = \mathbf{t} \text{ అనగా } \mathbf{b}_1 \| \mathbf{t} \text{ అవుతుంది} \qquad \text{—— (1)}$$

దీనిని S_1 దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$-\tau_1\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}\frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \tau_1 = k\frac{ds}{ds_1} \text{ లేక}$$

$$k = \tau_1\frac{ds_1}{ds} \Rightarrow kk_1 = \tau\tau_1 \text{ అవుతుంది.} \qquad \text{—— (2)}$$

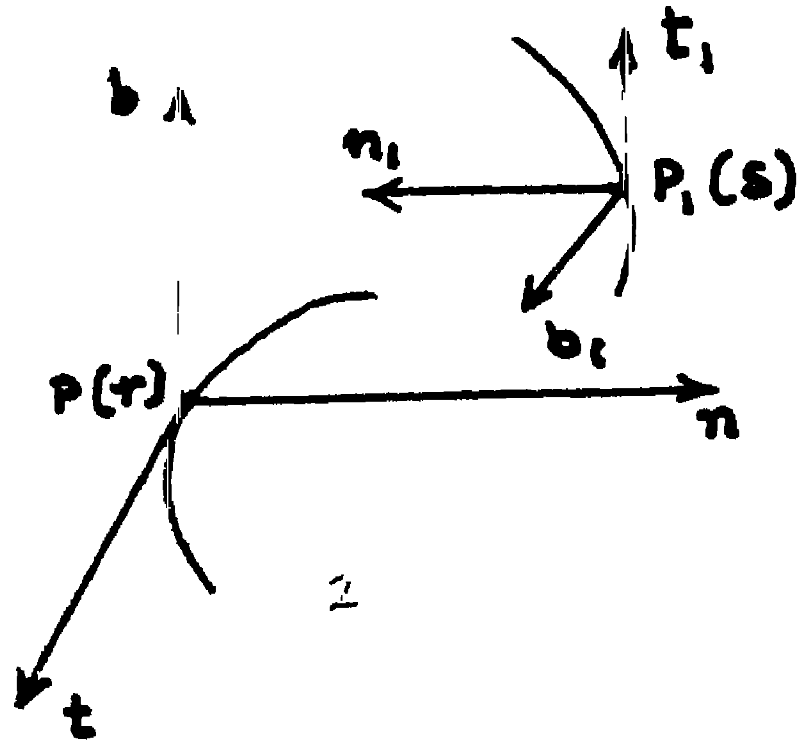
ఇదే విధముగా $\tau = k_1\frac{ds_1}{ds}$ లేక $k_1[\rho\tau + (\rho'\sigma)']$ అవుతుంది.

పై సమీకరణము,

$$\tau_1 = \frac{k}{\rho\tau + (\rho'\sigma)'} \text{ లు } \rho' = 0 \text{ అయినప్పుడు}$$

$$\rho k_1 = 1, \ \tau\tau_1 = k^2 \text{ అవుతుంది.}$$

అనగా c కి స్థిర వక్రత ఉండినప్పుడు విమోటనముల లబ్ధము స్థిరరాశి మరియు c_1 యొక్క వక్రతకూడ స్థిరరాశి అవుతుంది.



పటము - 2.14

ఉదా 33 : $\mathbf{r} = (2t + 1, 3t^2 + 2, 4t^3 + 3)$ అను వక్రమునకు (1, 2, 3) వద్ద

(i) సంస్పర్శక గోళ సమీకరణము, (ii) సంస్పర్శక వృత్త సమీకరణములు వ్రాయండి.

$P(1, 2, 3) \Rightarrow t = 0 ; \mathbf{r} = ((2t + 1), (3t^2 + 2), (4t^3 + 3))$

$\Rightarrow \dot{r} = (2, 6t, 12t^2), \ddot{r} = (0, 6, 24t), \dddot{r} = (0, 0, 24)$.

$t = 0$ వద్ద $\dot{r} = (2, 0, 0), \ddot{r} = (0, 6, 0), \dddot{r} = (0, 0, 24)$

సంస్పర్శక గోళముపై వక్రము యొక్క (4) ఏకీభవించు బిందువులుంటాయి.

$\Rightarrow \phi(t = 0) = [(1 - \alpha) i + (2 - \beta) j + (3 - \mathbf{r}) k]^2 - a^2 = 0,$

ఇచ్చట (α, β, γ) గోళకేంద్రం

$\phi^1 (t = 0) = [(1 - \alpha) i (2 - \beta) j + (3 - \gamma) k]. 2j = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

$\phi^{11} (t = 0) = [(1 - \alpha) i + (2 - \beta) j + (\beta - \gamma) k] . 6j + 2^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{8}{3}$

$\phi^{111} (t = 0) = [(1 - \alpha) i + (2 - \beta) j + (3 - \gamma) k] . 24k + 3(0) = 0 \Rightarrow \gamma = 3$

సంస్పర్శక గోళ కేంద్రము $\left(1, \frac{8}{3}, 3\right)$,

వ్యాసార్ధము = $\left|(1, 2, 3) - \left(1, \frac{8}{3}, 3\right)\right| = \frac{2}{3}$

కావున సంస్పర్శక గోళ సమీకరణము

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + (2-3)^2 = \frac{4}{9}$$ లేక

$3(x^2 + y^2 + z^2) - 6x - 16y - 18z + 50 = 0$ అవుతుంది.

సంస్పర్శల సమీకరణము = $[R - r, \dot{r}, \ddot{r}] = 0$ లేక

$$[(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k] \,.\, 12k = 0 \Rightarrow z - 3 = 0$$

కావున సంస్పర్శక వృత్తము పై గోళము, సమతలముల ఛేదనము అనగా

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 16y + 23 = 0$ అవుతుంది.

ఉదా 34 : $\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, a\cos\beta\, t)$ అనుకుండలినికి గోళీయ వక్రతా వ్యాసార్థము, వక్రతా వృత్త వ్యాసార్థములు సమానము.

$$\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, a\cos\beta\, t) \Rightarrow \dot{r} = (-a\sin t, a\cos t, a\cos\beta)$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{-\sin t}{\operatorname{cosec}\beta}, \frac{\cos t}{\operatorname{cosec}\beta}, \cos\beta\right); \frac{dt}{ds} = (a\operatorname{cosec}\beta)^{-1}$$

కావున $$k\mathbf{n} = \left(\frac{-\cos t}{a\operatorname{cosec}^2\beta}, \frac{-\sin t}{a\operatorname{cosec}^2\beta}, 0\right) \Rightarrow k = \frac{\sin^2\beta}{a}, k' = 0$$

$$\mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t, 0), \mathbf{b} = t \wedge \mathbf{n} = (\sin \mathbf{r}\cos\beta, -\cos t\cos\beta, \sin\beta)$$

$$\mathbf{b}' = \left(\frac{\cos t\sin\beta\cos\beta}{a}, \frac{\sin t\sin\beta\cos\beta}{a}, 0\right) = -\tau\mathbf{n} \Rightarrow \tau = \frac{\sin\beta\cos\beta}{a}$$

$$R^2 = \frac{k'^2 + \tau^2 k^2}{k^4\tau^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow R = k.$$

సూచన : ఈ వక్రమునకు స్థిరవక్రత కలదు కావున § 2.19 యొక్క 3 వ ధర్మమును ఉపయోగించి కూడ ఫలితములను సరిచూడవచ్చును.

ఉదా 35 : s_1 ఒక వక్రము యొక్క వక్రతా గోళ కేంద్రముల బిందుపథము యొక్క ఛాపమును సూచిస్తే

(i) $ds_1 = R\,dR/\sqrt{R^2 - \rho^2}$, (ii) $\rho_1 = R\dfrac{dR}{d\rho}$,

(iii) $\sigma_1 = \frac{R\rho}{\sigma}\frac{dR}{d\rho}$ మరియు (iv) $\rho\rho_1 = \sigma\sigma_1$ అని చూపండి.

$$R^2 = \rho^2 + \dot{\rho}^2\sigma^2 \Rightarrow R\frac{dR}{ds} = RR' = \rho\rho' + (\rho'\sigma)(\rho'\sigma)'$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\rho'\sigma}\frac{dR}{ds} = \frac{\rho}{\sigma} + (\rho'\sigma)' = \frac{ds_1}{ds}$$

$$\therefore ds_1 = \frac{s\,dR}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \quad (\because \lambda = -\rho, \mu = -\rho'\sigma, R^2 = \lambda^2+\mu^2) \qquad \text{—— (i)}$$

$$R^2 = \rho^2 + \rho'^2\sigma^2 \Rightarrow R\frac{dR}{d\rho}\rho' = \rho\rho' + (\rho'\sigma)(\rho'\sigma)'$$

$$\Rightarrow \frac{\rho R}{\sigma}\frac{dR}{d\rho} = \frac{\rho^2}{\sigma} + \rho(\rho'\sigma)'$$

కాని $\tau_1 = \frac{k}{\rho\tau + (\rho'\sigma)'} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\rho^2}{\sigma} + \rho(\rho'\sigma)'$,

$$\therefore \sigma_1 = \frac{R\rho}{\sigma}\frac{dR}{d\rho} \qquad \text{—— (iii)}$$

§ 2.19 యొక్క ధర్మములో $\tau\tau_1 = kk_1$ అని చూసినాము

$\Rightarrow \rho\rho_1 = \sigma\sigma_1$ —— (iv) అవుతుంది.

(iii), (iv) ల నుండి $\rho_1 = R\frac{dR}{d\rho}$ అవుతుంది —— (ii)

లేక $k_1 = \frac{\tau}{\rho\tau + (\rho'\sigma)'} = \tau\frac{1}{\frac{R}{\rho'\sigma}\frac{dR}{ds}}$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\rho'}{R\frac{dR}{ds}} = \frac{\frac{d\rho}{ds}}{R\frac{dR}{ds}}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = R\frac{dR}{ds}\frac{ds}{d\rho} = R\frac{dR}{d\rho} \text{ అవుతుంది.}$$

ఉదా 36 : ఒక వక్రము గోళము పై ఉండుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఆ వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద $\frac{\rho}{\sigma} + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$ అని చూపండి.

ఆవశ్యకము : వక్రము గోళముపై ఉండిన ఆ గోళము వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువునకు సంస్పర్శక గోళము అవుతుంది.

$$R^2 = \rho^2 + \rho'^2 \sigma^2 = \rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}$$

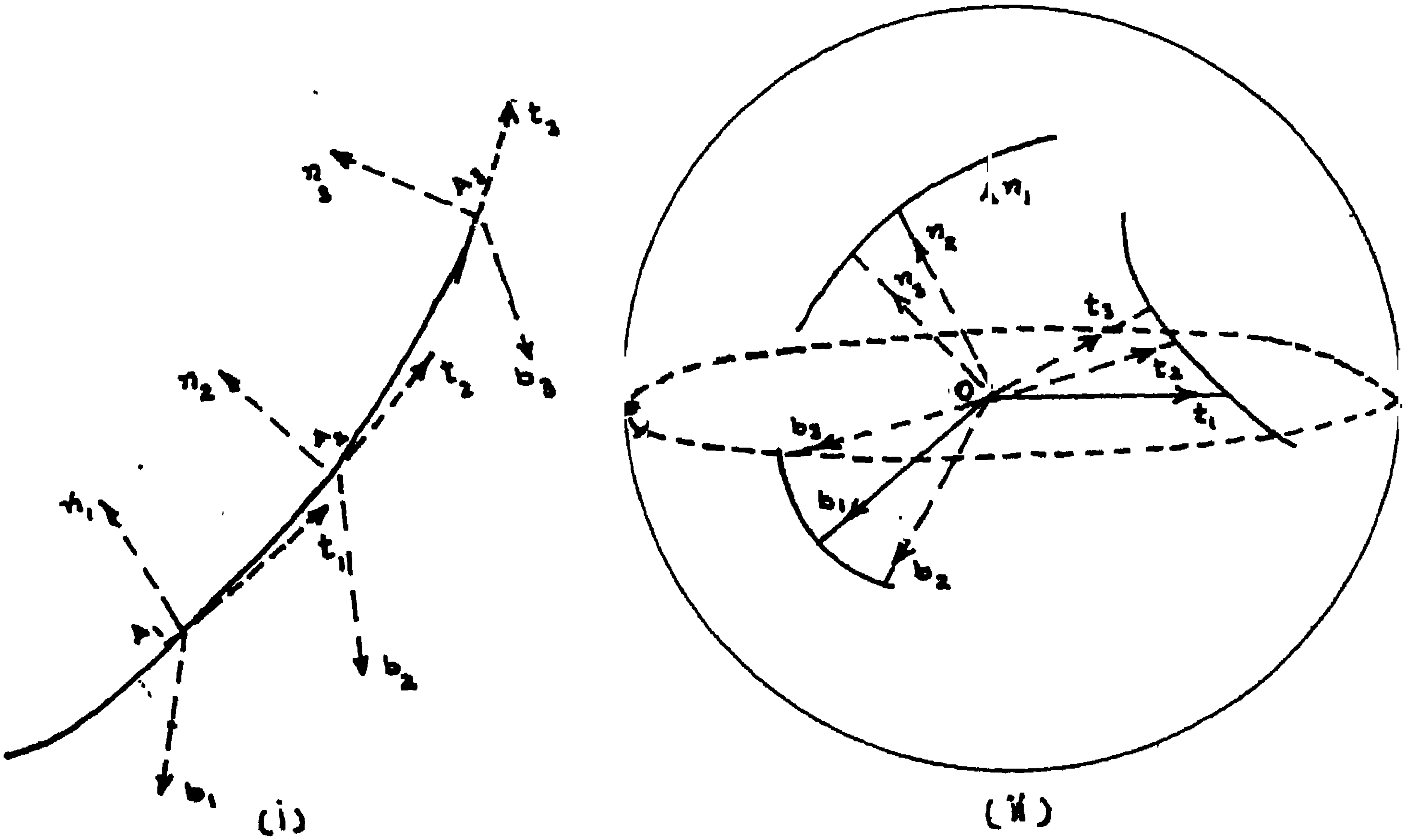
$$\Rightarrow \rho\rho' + \frac{\rho'}{\tau}\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{\sigma} + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$$ అవుతుంది.

పర్యాప్తము : దత్త సమీకరణమును $\frac{2\rho'}{\tau}$ చే గుణించిన

$$2\rho\rho' + \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2 = 0$$ లేక $\frac{\rho^2 + \rho'^2}{\tau^2} = R^2 =$ స్థిరరాశి.

⇒ వక్రము యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద ఒకే సంస్పర్శక గోళము ఉంటుంది అనగా వక్రము ఈ గోళముపై ఉంటుంది.

2.20 గోళీయ ప్రాతినిధ్యము :



పటము 2.15

నిర్వచనము – 1 :

ఒక వక్రము c కి గీయబడిన యూనిట్ స్పర్శరేఖలు ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఉపాభిలంబరేఖలు ఒక బిందువు 0 వద్ద గుర్తింపబడిన ఈ సదిశల చివరిబిందువుల బిందుపథము యూనిట్ వ్యాసార్ధము కలగోళముపై ఏర్పరచు వక్రము(ల)ను c యొక్క గోళీయ ప్రాతినిధ్యము (గోళీయసూచిక) అంటాము. ఈ రెండు వక్రముల (వక్రము, దాని ప్రతిబింబముల) మధ్య అన్యోన్యానురూపత వ్యవస్థితము అవుతుంది.

నిర్వచనము – 2 :

ఇవ్వబడిన వక్రము యొక్క యూనిట్ స్పర్శరేఖ స్థాన సదిశ కలిగిన బిందువు యొక్క బిందు పథము స్పర్శరేఖ యొక్క గోళయ సూచిక అవుతుంది. అట్లే ప్రధాన అభిలంబరేఖ ఉపాభిలంబరేఖల గోళీయ సూచికలు కూడ నిర్వచింపబడుతాయి.

స్పర్శరేఖ యొక్క గోళీయ సూచిక యొక్క చాపములో మార్పు δs_1, రెండు సామీప్య బిందువుల స్పర్శరేఖలు $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1 + \delta\mathbf{t}$ ల మధ్యకోణము $\delta\theta$ అయిన

$$ds_1 = d\theta \Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \mathbf{k} \text{ ; లేక}$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{ds_1} = kn\frac{ds}{ds_1} \Rightarrow s_1{}^{\prime} = k$$

సమతల వక్రములకు వక్రతను స్పర్శరేఖ యొక్క వంపురేటుగ సాధారణముగ వాడుతాము.

గోళీయ సూచికకు వక్రత – విమోటనములు :

(A) స్పర్శరేఖ యొక్క గోళీయ సూచికకు

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = k\mathbf{n}\frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = k \text{ మరియు}$$

$$\mathbf{t}_1 \,||\, \mathbf{n} ; \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} = \frac{d\mathbf{n}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \mathbf{k}_1\,\mathbf{n}_1 = \frac{\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}}{k} \text{ అనగా}$$

$$k_1{}^2 = \frac{\tau^2 + k^2}{k^2} \qquad \text{—— (1)}$$

గోళీయ సూచిక వక్రత, వృత్తాకార వక్రతల నిష్పత్తి అవుతుంది. ఈ గోళీయ సూచిక యొ

ఉపాధిలంబరేఖ

$$b_1 = t_1 \wedge n_1 = \frac{\tau t + kb}{kk_1}$$ ఈ గోళీయ సూచిక $R = 1$ గోళముపై కలదు

$$\Rightarrow R^2 = 1 = \frac{k_1 \tau_1^2 + k_1^{\prime 2}}{k_1^4 \tau_1^2}$$ లేక

$$\tau_1^2 = \frac{k_1^{\prime 2}}{k_1^4 - k_1^2} \qquad \text{—— (2)}$$

సమీకరణము (1)

$$k_1 k_1' s_1' = \frac{\tau}{k}\left(\frac{\tau}{k}\right)' \Rightarrow k_1 k_1' = \frac{\tau}{(k^2)} \frac{k\tau' - \tau k'}{k^2}$$

సమీకరణము (2)

$$\tau_1 = \frac{k_1 k_1'}{k_1^2 (k_1^2 - 1)^{1/2}} = \frac{\tau}{k^2} \frac{(k\tau' - \tau k')}{k^2} \frac{k^2}{(\tau^2 + k^2)} \frac{k}{\tau}$$

$$= \frac{(k\tau' - \tau k')}{k(\tau^2 + k^2)}$$ అవుతుంది.

(B) ప్రధాన అభిలంబరేఖ యొక్క గోళీయ సూచికకు

$$t_1 = \frac{dr_1}{ds_1} = \frac{dn}{ds}\frac{ds}{ds_1} = (\tau b - kt)\frac{ds}{ds_1}$$

$$\Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = (\tau^2 + k^2)^{1/2}$$

పై సమీకరణమును s, దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$k_1 n_1 = \frac{d}{ds}\left[\frac{\tau b - kt}{(\tau^2 + k^2)^{1/2}}\right] \frac{1}{(\tau^2 + k^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow (k^2 + \tau^2) k_1 n_1 = \tau (k\tau' - k'\tau) t - (k^2 \tau^2)^2 n + k(k\tau' - \tau k') b$$

లేక $$k_1^2 = 1 + \frac{(k\tau' - k'\tau)^2}{(k^2 + \tau^2)^3}$$ అవుతుంది.

R^2 విలువనుండి $$\tau_1^2 = \frac{k_1^{\prime 2}}{k_1^2 (k_1^2 - 1)} = \frac{k_1^2 k_1^{\prime 2}}{k_1^4 (k_1^2 - 1)}$$

k_1^2 విలువనుండి $k_1 k_1$

$$= \frac{(k^2+\tau^2)^3 (k\tau' - k'\tau)(k\tau'' - k''\tau) - 3(k\tau' - k'\tau)^2 (k^2+\tau^2)^2 (kk' + \tau\tau')}{(k^2+t^2)^6}$$

లేక $k_1 k_1' = \dfrac{(k^2+\tau^2)(k\tau' - k'\tau)(k\tau'' - k''\tau) - 3(k\tau' - k'\tau)^2 (kk' + \tau\tau')}{(k^2+\tau^2)^6}$

వస్తుంది. దీనినుండి τ_1 కనుగొనవచ్చును.

(C) ఉపాభిలంబరేఖల గోళీయ సూచికకు

$$r_1 = b \Rightarrow t_1 = -\tau n \frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = \tau, t_1 = -n$$

$$\Rightarrow k_1 n_1 = -\frac{(\tau b - kt)}{\tau} \Rightarrow k_1^2 = 1 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2$$ అవుతుంది.

$$\tau_1^2 = \frac{(k_1 k_1')^2}{k_1^4 (k_1^2 - 1)};$$

పై సమీకరణమునుండి $k_1 k_1' = \dfrac{k(\tau k' - k\tau')}{\tau^4}$

కావున $\tau_1^2 = \dfrac{(\tau k' - \tau' k)^2}{\tau^2(\tau^2+k^2)}$ అవుతుంది.

ఉదా 37 : ఒక వక్రమునకు రెండు బిందువుల వద్ద గీసిన గోళీయ వక్రతా వ్యాసార్ధముల మధ్యకల అత్యల్ప దూరరేఖ వ్యాసార్ధమును $\left(\frac{\sigma}{\rho}\frac{d\rho}{dR}\right)^2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అంతరాళములోని రెండు సామీప్య బిందువుల వద్ద గీసిన వక్రతా గోళముల కేంద్రములు S(s) H(h) అయిన

$s = r + \rho n + \sigma\rho' b = r + M$ అనుకొనుము,

$M = \rho n + \sigma\rho' b$. P, Q లు వక్రము మీది బిందువులయిన SP సమీకరణము

$R = r + pM$, HQ సమీకరణము $R = (r + \delta r) + q(M + \delta M)$ అవుతుంది.

HQ లను వాటి అల్పతమదూర రేఖ L, M లలో ఖండించినప్పుడు SP ని L λ : 1 [నిష్ప]త్తిలో విభజిస్తుందనుకుంటె L స్థానసదిశ

$$\frac{\lambda \mathbf{r} + 1\,(\mathbf{r} + \mathbf{M})}{\lambda + 1} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{M}}{\lambda + 1}$$ అవుతుంది.

$LM \perp HQ,\ LM \perp SP \Rightarrow LM \parallel SP \wedge HQ = \mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} + \delta\mathbf{M}) = \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}$.

LM, HQ లు కల సమతల సమీకరణము

$$[\mathbf{R} - (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}), \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] = 0$$ అవుతుంది.

L దీనిలో బిందువు కావున

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{M}}{1+\lambda}$$ ప్రతిక్షేపించిన $\left[\frac{\mathbf{M}}{1+\lambda} - \delta\mathbf{r}, \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}\right] = 0$ లేక

$$[\mathbf{M}, \delta\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] = (1+\lambda)\,[\delta\mathbf{r}, \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] = 0$$

అవుతుంది.

$[\delta\mathbf{r}, \delta\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] \to 0$ కావున δs చే భాగించి అవధి తీసికొనిన

$$[\mathbf{M}, \mathbf{M}^{1}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] = (1+\lambda)\,[\mathbf{t}, \mathbf{M}, \mathbf{M} + \mathbf{M}^{1}]$$ లేక

$$\lambda = \frac{[\mathbf{M}, \mathbf{M}^{1}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}] + [\mathbf{M}, \mathbf{t}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}]}{[\mathbf{t}, \mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}]}$$

అనగా $$\lambda = \frac{[\mathbf{M}, \mathbf{M}^{1} + \mathbf{t}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}]}{[\mathbf{t}, \mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1}]}$$ అవుతుంది.

$$\mathbf{M} = \rho\mathbf{n} + \sigma\rho^{1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{M}^{1} = \rho\,(\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) + \rho^{1}\mathbf{n} - \sigma\rho^{1}\,(\tau\mathbf{n}) + (\sigma\rho^{1})^{1}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}^{1} = -\mathbf{t} + \{\rho\tau + (\sigma\rho^{1})^{1}\}\,\mathbf{b} = -\mathbf{t} + \mu\mathbf{b}$$ అనుకొనుము.

$$\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{1} = \rho\mu\mathbf{t} - \sigma\rho^{1}\mathbf{n} + \rho\mathbf{b}$$ అవుతుంది కావున

$$\lambda = \frac{[(\rho\mathbf{n} + \sigma\rho^{1}\mathbf{b}), \mu\mathbf{b}, \rho\mu\mathbf{t} - \sigma\rho^{1}\mathbf{n} + \rho\mathbf{b}]}{[\mathbf{t}, \rho\mathbf{n} + \sigma\rho^{1}, \rho\mu\mathbf{t} - \sigma\rho^{1}\mathbf{n} + \rho\mathbf{b}]} = \frac{\rho^2\mu^2}{\rho^2 + (\sigma\rho^{1})^2} = \frac{\rho^2\mu^2}{R^2}$$

R^2 విలువనుండి

$$RR^{1} = \rho\rho^{1} + (\sigma\rho^{1})(\sigma\rho^{1})^{1} \Rightarrow R\frac{dR}{dS} = \sigma\frac{d\rho}{ds}\,(\rho\tau + (\sigma\rho^{1})^{1}) = \sigma\frac{d\rho}{ds}\,\mu$$

$$\Rightarrow R\frac{dR}{d\rho} = \mu\sigma$$

లేక $$\lambda = \frac{\mu^2\rho^2}{R^2} = \frac{\mu^2\rho^2}{\mu^2\sigma^2}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)^2$$ లేక $$1 : \lambda = \left(\frac{\sigma}{\rho}\,\frac{d\rho}{dR}\right)^2$$ అవుతుంది.

ఉదా 38 : వర్తుల కుండలిని యొక్క గోళీయ సూచికలు వృత్తములవుతాయని చూపండి.

మొదటి పద్ధతి :

వక్రము $\mathbf{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, c\theta) \Rightarrow \mathbf{r}^1 = (-a\sin\theta, a\cos\theta, c).\ \theta^1$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} = \mu \text{(అనుకొనుము)}$$

$\therefore\ \mathbf{t} = (-a\mu\sin\theta, a\mu\cos\theta, c\mu) \Rightarrow k\mathbf{n} = (-a\mu^2\cos\theta, a\mu^2\sin\theta, 0)$

$\therefore\ k = a\mu^2 ; \mathbf{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = (c\mu\sin\theta, -c\mu\cos\theta, a\mu)$

$\Rightarrow -\tau\mathbf{n} = (c\mu^2\cos\theta, c\mu^2\sin\theta, 0) \Rightarrow \tau = c\mu^2$

$\therefore$ (i) స్పర్శరేఖల గోళీయ సూచిక సమీకరణము $\mathbf{r}_1 = \mathbf{t}$; $x = -a\mu\sin\theta, y = a\mu\cos\theta$

$z = c\mu$ లేక $x^2 + y^2 = a^2\mu^2, z = c\mu$ అనువృత్తము అవుతుంది.

(ii) ప్రధాన అభిలంబల గోళీయ సూచిక సమీకరణము $\mathbf{r}_1 = \mathbf{n}$

$\Rightarrow x = -\cos\theta, y = -\sin\theta, z = 0$ లేక $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ అనువృత్తము మరియు

(iii) ఉపాభిలంబరేఖల గోళీయ సూచిక సమీకరణము

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2\mu^2, z = a\mu$ అనువృత్తము అవుతాయి.

రెండవ పద్ధతి :

దత్త వక్రము వర్తుల కుండలిని కావున $\frac{k}{\tau} = \frac{a}{c}(-\tan\alpha)$ అవుతుంది. కావున

$$k_t = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{k^2}} = \operatorname{cosec}\alpha = \text{స్థిరరాశి}$$

కావున స్పర్శరేఖల గోళీయ సూచికలు వృత్తములవుతాయి.

$$k_n = \left[1 + \frac{(k\tau^1 - \tau k^1)^2}{(\tau^2 + k^2)^3}\right]^{1/2} = 1$$

కావున ప్రధాన అభిలంబరేఖ గోళీయ సూచికలు మరియు

$$k_b > \left[1 + \frac{k^2}{\tau^2}\right]^{1/2} = 1$$

$\therefore$ ఉపాభిలంబరేఖల గోళీయ సూచికలు వృత్తములు అవుతాయి.

2.21 Lancret సమీకరణము:

S_t, S_n, S_b ఒక వక్రము యొక్క **t, n, b** ల గోళీయ సూచికల సచాపములయిన

$$\frac{ds_t}{ds} = k, \frac{ds_n}{ds} = (k^2 + \tau^2)^{1/2} \text{ మరియు } \frac{ds_b}{ds} = \tau$$

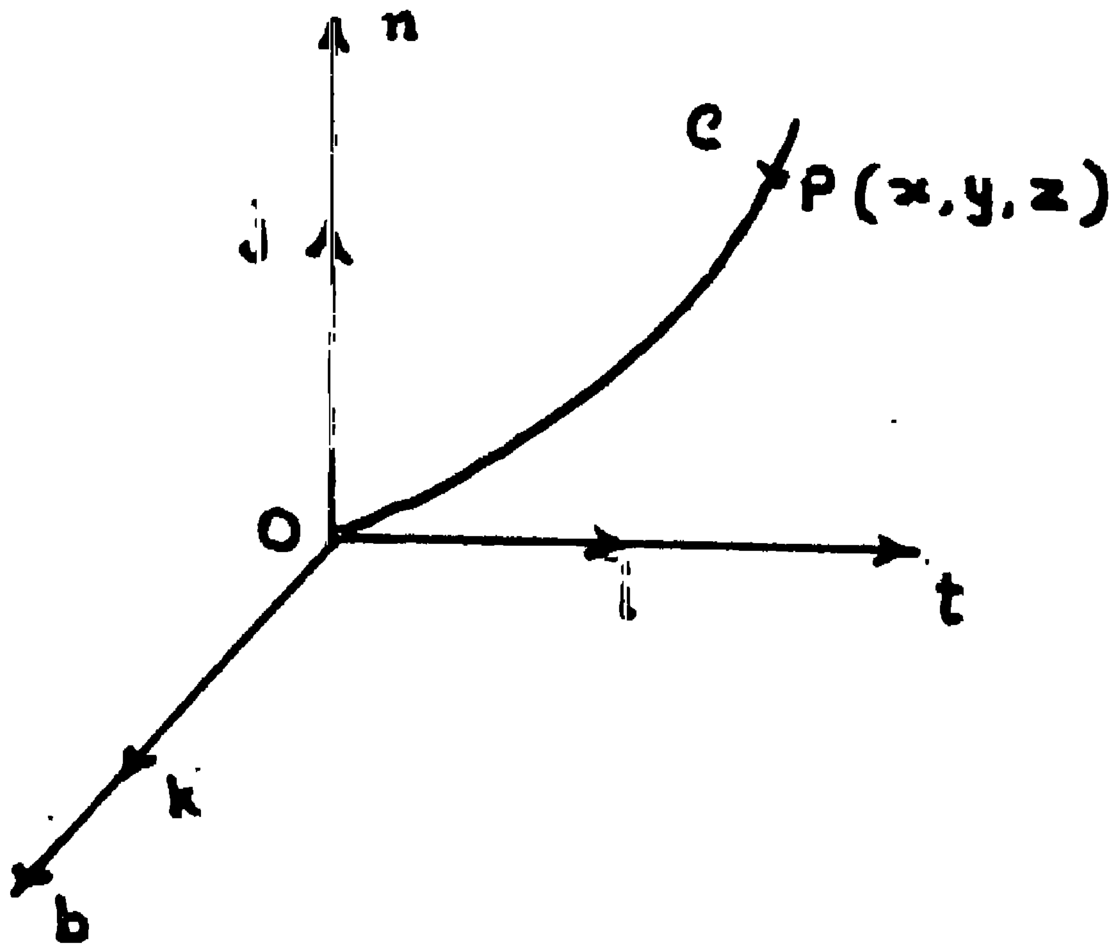
అవుతాయని చూపినాము.

$$\Rightarrow (ds_n)^2 = (ds_t)^2 + (ds_b)^2.$$

దీనిని Lancret సమీకరణము అనియు $[(ds_b)^2 + (ds_t)^2]^{1/2}$ ను వక్రము యొక్క తృతీయ వక్రత అని అంటాము.

సూచన : విభిన్న వక్రములకు ఒకే గోళీయ సూచికలు ఉండే అవకాశము కూడ వ్యవస్థితము. ఒకే సమతలములోని విభిన్న వ్యాసార్ధములు, విభిన్నకేంద్రములు కలవృత్తములకు, సహాక్ష స్థూపములపై కలవర్తులకుండలినులకు ఈ ధర్మము వర్తిస్తుంది.

2.22 ఒక బిందువు వద్ద వక్రము యొక్క ఆకారము :



పటము - 2.16

ఒక వక్రము యొక్క చలన బిందువు P యొక్క నిరూపకములు వక్రచాపము పొడవును సూచించే స్థిరబిందువు O వద్ద కల **t, n, b** లచే సూచించిన x, y, z లను S^3 వరకు వ్యక్తపరచవచ్చును.

$\overline{OP} = S, P : (x, y, z)$ అయిన

$OP = \mathbf{r} = x\mathbf{t} + y\mathbf{n} + z\mathbf{b} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

అవుతుంది. వక్ర సమీకరణము $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అయిన $s = 0$ సామీప్యములో మెక్లారిన్ విస్తరణ ప్రకారము

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(o) + s\mathbf{r}^{1}(0) + \frac{s^2}{\underline{2}}\mathbf{r}^{11}(0) + \frac{s^3}{\underline{3}}\mathbf{r}^{111}(0);$$

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}, \mathbf{r}''(s) = k\mathbf{n}, \mathbf{r}'''(s) = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$$

అవుతాయి కావున s = 0 వద్ద

$$x\mathbf{t} + y\mathbf{n} + 2\mathbf{b} = s\mathbf{t} + \frac{s^2}{2}k\mathbf{n} + \frac{s^3}{6}(-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}) \text{ లేక}$$

$$x = s - \frac{k^2 s^3}{6} ....,\quad y = \frac{s^2 k}{2} + \frac{s^3 k'}{6} .....,\quad z = \frac{s^3 k\tau}{6} .....$$

అవుతాయి. ఈ సమీకరణములను వక్రము యొక్క విధిత సమీకరణములు అంటాము.

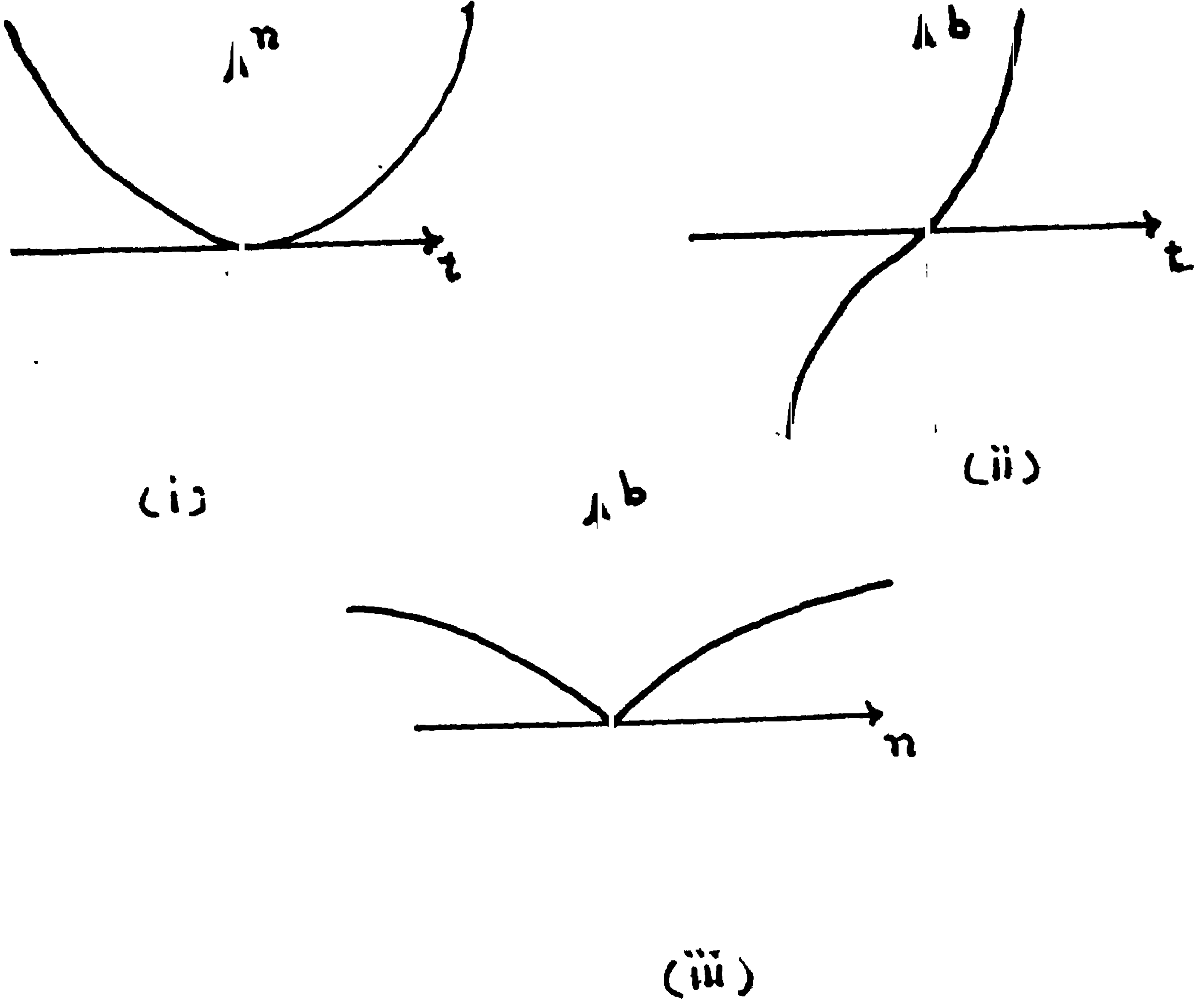
s = 0 యొక్క సామీప్యములో చలన నిరూపక తలములపై ఈ వక్రము యొక్క విక్షేపములు మొదటి పదములు మాత్రమే వ్రాసిన

i) సంస్పర్శకతలములో $x = s, y = \frac{ks^2}{2}$ లేక $y = \frac{kx^2}{2}$;

ii) చాపకలనీయ తలములో $x = s, z = \frac{s^3 k\tau}{6}$ లేక $x^3 = \frac{6z}{k\tau}$ మరియు

iii) అభిలంబతలములో $y = \frac{ks^2}{2}, z = \frac{s^3 k\tau}{6}$ లేక $y^3 = \frac{9k}{2\tau^2} z^2$ అవుతాయి.

అవి పటములో ఈ క్రింది విధముగ గుర్తించబడుతాయి.



పటము 2.17

2.23 ఒక బిందువు సామీప్యములో t, n, b ల విస్తరణ :

ఒక వక్రము C పై స్థిరబిందువు A, దీని యాదృచ్ఛిక స్థాన సదిశ f(a) మరియు దీని సామీప్యబిందువు P అయిన P వద్ద ప్రమేయము f విస్తరణ

$$f(a+s) = f(a) + sf'(a) + \frac{s^2}{\underline{2}} f''(a) + \frac{s^3}{\underline{3}} f'''(a) + \ldots$$ అవుతుంది.

P వద్ద స్పర్శరేఖ $\mathbf{t}_p$ విస్తరణకు f(a) బదులు $\mathbf{t}$ వ్రాస్తాము.

$$\mathbf{t}_p = \mathbf{t} + s\mathbf{t}' + \frac{s^2}{2}\mathbf{t}'' + \frac{s^3}{6}\mathbf{t}''' = \mathbf{t} + sk\mathbf{n} + \frac{s^2}{2}(k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b} - k^2\mathbf{t})$$

$$+ \frac{s^3}{6}\left[-3kk'\mathbf{t} + k_n'' - k(k^2+\tau^2)\mathbf{n} + (k\tau' + 2k'\tau)\mathbf{b}\right]$$

అవుతుంది. (s^3 వరకు పదములు వ్రాయగ)

$$\Rightarrow t_p = \left(1 - \frac{k^2 s^2}{2} - \frac{kk^1 s^3}{2}\right) t + \left[ks + \frac{k^1 s^2}{2} - (k^3 + k\tau^2 - k^{11}) \frac{s^3}{6}\right] n$$

$$+ \left[k\tau s^2 + (k\tau^1 + 2k^1 \tau) \frac{s^3}{6}\right] b \text{ అవుతుంది.} \quad \text{—— (1)}$$

P వద్ద ప్రధాన అభిలంబరేఖ n_p అయితే

$$n_p = n + s(\tau b - kt) + \frac{s^2}{2} [-k^1 t - (\tau^2 + k^2) n + \tau^1 b]$$

$$+ \frac{s^3}{6} [-k^{11} t + k (\tau^2 + k^2) t - 3 (kk^1 + \tau\tau^1) n - \tau (\tau^2 + k^2) b + \tau^{11} b$$

$$\Rightarrow n_p = \left\{- ks - \frac{k^1 s^2}{2} + (-k^{11} + k (k^2 + t^2)) \frac{s^3}{6}\right\} t$$

$$+ \left\{1 - (\tau^2 + k^2) \frac{s^2}{2} - (kk^1 + \tau\tau^1) \frac{s^3}{2}\right\} n$$

$$+ \left[\tau s + \frac{\tau^1 s^2}{2} + \{\tau^{11} - \tau (\tau^2 + k^2)\} \frac{s^3}{6}\right] b \text{ అవుతుంది.} \quad \text{—— (2)}$$

P వద్ద ఉపాభిలంబరేఖ b_p అయితే

$$b_p = b + s(-\tau n) + \frac{s^2}{2} (k\tau t - \tau^1 n - \tau^2 b) +$$

$$\frac{s^3}{6} [\{(k\tau)^1 + k\tau^1\} t + (k^2 \tau + \tau^3 - \tau^{11}) n - 3 \tau\tau^1 b]$$

$$\text{లేక } b_p = \left[\frac{k\tau s^2}{2} + \{(k\tau)^1 + k\tau^1\} \frac{s^3}{6}\right] t + \left[- s\tau - \frac{s^2 \tau^1}{2} + \frac{s^3}{6} (k^2 \tau + \tau^3 - \tau^{11})\right] n$$

$$+ \left(1 - \frac{s^2 \tau^2}{2} - \frac{s^3 \tau\tau^1}{2}\right) b \text{ అవుతుంది.} \quad \text{—— (3)}$$

ఈ ఫలితాన్ని $b_p = t_p \wedge n_p$ నుపయోగించి సరిచూడండి.

ఉదా 39 : ఒక వక్రముపై O, P లు సామీప్య బిందువులు, చాపము OP = S అయిన O, P ల వద్ద గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖల మధ్యకోణము కనుగొనండి.

O, P ల వద్ద వక్రమునకు గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖల దిక్ సంఖ్యలు వరుసగ $(0, 1, 0), (-ks, 1, \tau s)$ అవుతాయి కావున వాటి మధ్యకోణము θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2(k^2 + \tau^2)}} = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\theta^2}{2} = [1 + s^2(\tau^2 + k^2)]^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{s^2(\tau^2 + k^2)}{2} \text{(సుమారుగ)}$$

$$\Rightarrow \theta = s(\tau^2 + k^2)^{1/2}$$ అవుతుంది.

ఉదా 40 : ఒక వక్రముపై s దూరములో కల బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు గీయబడిన వాటి ఉమ్మడి లంబము d సుమారుగ $\frac{k\tau s^3}{12}$ ఉంటుందని చూపండి.

(S) దూరములో కల బిందువులు P, Q ల పరామితులను S గ తీసికొనిన వీటి స్థానసదిశలు $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(s)$; ఈ బిందువుల వద్ద వక్రమునకు గీసిన యూనిట్ స్పర్శరేఖలు $\mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(s)$ అవుతాయి. ఈ స్పర్శరేఖలకు ఉమ్మడి లంబము $\mathbf{r}'(s) \wedge \mathbf{r}'(0)$ కు సమాంతరముగ ఉంటుంది కావున

$$d = \mathbf{r}'(s) \wedge \mathbf{r}'(0) \text{ పై } PQ \text{ యొక్క విక్షేపము } = \frac{[(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)), \mathbf{r}'(s), \mathbf{r}'(0)]}{|\mathbf{r}'(s) \wedge \mathbf{r}'(0)|}$$

కాని $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + s\mathbf{t} + \frac{s^2}{2}k\mathbf{n} + \frac{s^3}{6}(-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}) + O(s^4)$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(s) = \mathbf{t} + 2sk\mathbf{n} + s^2k'\mathbf{n} - s^2k^2\mathbf{t} + s^2k\tau\mathbf{b} + 0(s^3)$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{r}'(s) \wedge \mathbf{r}'(0) = s^2.k\tau\mathbf{n} - (k's^2 + 2sk)\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}'(s) - \mathbf{r}'(0)| = [s^4k^2\tau^2 + (k's^2 + 2sk)^2]^{1/2} = 2sk \text{ [సుమారుగ]};$$

$$[\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0), \mathbf{r}'(s), \mathbf{r}'(0)] = \begin{pmatrix} \frac{s^2k}{2} & s^2k\tau \\ -\frac{s^3k\tau}{6} & .2sk \end{pmatrix} = \frac{s^4k^2\tau}{2} - \frac{s^4k^2\tau}{3} = \frac{s^4k^2\tau}{6}$$

కావున $d = \frac{s^3k\tau}{12}$ (సుమారుగ) అవుతుంది.

ఉదా 41 : ఒక వక్రముపై S దూరములో కల రెండు బిందువుల వద్ద గీయబడిన ప్రధాన అభిలంబరేఖల మధ్యకల అత్యల్ప దూరము $s\rho\,[\rho^2 + \sigma^2]^{-1/2}$ అనియు అది వక్రతా వ్యాసార్ధమును $\rho^2 : \sigma^2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనియు చూపండి.

(i) $P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ అనునవి $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అను వక్రముపైకల రెండు సామీప్యబిందువులు, $\mathbf{n}, \mathbf{n} + \delta\mathbf{n}$ లు ఈ బిందువుల వద్ద వక్రమునకు గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖలు అయిన వీటిమధ్యకల అల్పతమ దూరము $= \delta = \dfrac{[\delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{n} + \delta\mathbf{n}]}{|\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} + \delta\mathbf{n})|}$

$$\Rightarrow \delta = \frac{[\mathbf{r}^1\,\mathbf{n}\mathbf{n}^1]}{|\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}^1|}\,ds \ (\delta s \text{ చే భాగించి } \delta s \to 0 \text{ గ తీసికొనిన})$$

$$= \frac{[\mathbf{t}, \mathbf{n}, (\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})]}{|\tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}|}\,ds = \tau ds\,(\tau^2 + k^2)^{\frac{-1}{2}} = \rho\,(\rho^2 + \sigma^2)^{\frac{-1}{2}}\,ds$$

చాపము పొడవు s కావున $\delta = s\rho\,(\rho^2 + \sigma^2)^{\frac{-1}{2}}$ అవుతుంది.

(ii) P, Q ల వద్ద వక్రమునకు గీయబడిన ప్రధాన అభిలంబరేఖలు AP, BQ అయిన

$AP : \mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{n}$; $BQ : \mathbf{R} = (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{n} + \delta\mathbf{n})$

అవుతాయి. AB = అల్పతమ దూరము $= \delta\mathbf{r} + (\mu - \lambda)\,\mathbf{n} + \mu\delta\mathbf{n}$ అయిన

$AB \perp AP, AB \perp BQ$

$$\Rightarrow \{\delta\mathbf{r} + (\mu - \lambda\,\mathbf{n} + \mu\,\delta\,\mathbf{n}\}.\,\mathbf{n} = 0,\ \{\delta\mathbf{r} + (m - \lambda)\,\mathbf{n} + \mu\delta\mathbf{n}\}.\,\delta\mathbf{n} = 0$$

$$\Rightarrow \mu - \lambda = 0\,;\ \delta s \text{ చే భాగించి అవధి తీసికొనిన } \{\mathbf{t} + (\mu - \lambda)\,\mathbf{n} + \mu\mathbf{n}^1\}.\,\mathbf{n}^1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu\,;\ \mu\,(\tau + k^2) - k = 0\ (\because\ \mathbf{n}^1 = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t} \text{ కావున})$$

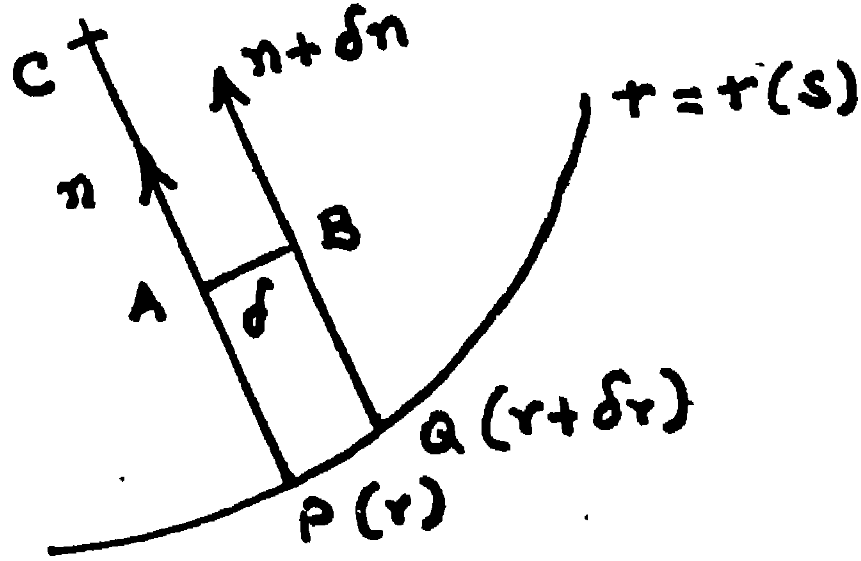
$$\Rightarrow \lambda = \mu = \frac{k}{k^2 + \tau^2}$$

P వద్ద వక్రతా కేంద్రము C అయిన $\overline{AB}, \overline{PC}$ ల నిష్పత్తి

$$\frac{PA}{AC} = \frac{PA}{PC - PA} = \frac{\mu}{\rho - \mu} = \frac{k/k^2 + \tau^2}{\dfrac{1}{k} - \dfrac{k}{k^2 + \tau^2}} = \frac{k}{\tau^2/k} = \frac{k^2}{\tau^2}$$

నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అనగా $CA : AP = \rho^2 ; \sigma^2$ అవుతుంది.



పటము 2.18

2.24 కేంద్రజము – ప్రతికేంద్రజము :

అంతరాళములోని ఒక వక్రము C యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ ఇంకొక వక్రము C_1 యొక్క ఏదో ఒక బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ అగునట్లు C, C_1 ల బిందువుల మధ్య అన్యోకానురూపత వ్యవస్థితమయిన C ని C_1 యొక్క కేంద్రజము అనియు C_1 ను C యొక్క ప్రతికేంద్రజము అనియు అంటాము.

2.24.1 ఇవ్వబడిన వక్రము యొక్క ప్రతికేంద్రజము :

C యొక్క సమీకరణము $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, C_1 యొక్క సమీకరణము $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s_1)$ అయిన C_1 పై బిందువు P_1, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{t}$ చే సూచింపబడుతుంది.

$$\mathbf{t}_1 = (\mathbf{r} + \lambda\mathbf{t})' \frac{ds}{ds_1} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = [(1 + \lambda')\,\mathbf{t} + \lambda k\mathbf{n}] \frac{ds}{ds_1} \,||\, \mathbf{n}$$

$\mathbf{t}.\,\mathbf{t}_1 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda + s = c$ లేక $\lambda = c - s$ అవుతుంది.

అనగ $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c - s)\,\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = (c - s)\,k \dfrac{ds}{ds_1}\,\mathbf{n} \Rightarrow \dfrac{ds_1}{ds} = (c - s)\,k.$

C_1 యొక్క ధనాత్మక దిశను $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}$ అగునట్లు తీసికొనవలెను.

ప్రతి కేంద్రజము యొక్క వక్రత, వివోటనములు :

$$t_1 = n \Rightarrow t_1{}' \frac{(\tau b - kt)}{(c-s)\,k} = k_1 n_1$$

$$\Rightarrow k_1{}^2 = \frac{\tau^2 + k^2}{(c-s)^2 k^2} \text{ మరియు}$$

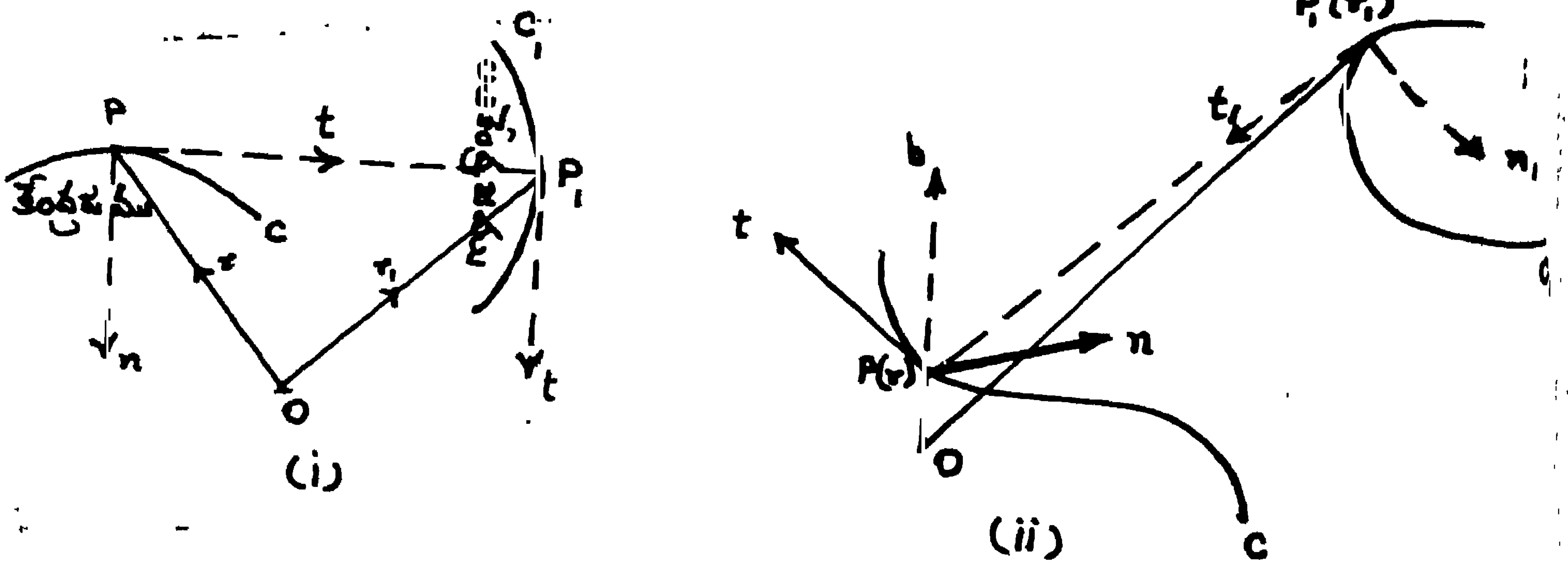
$$n_1 = \frac{\tau b - kt}{(\tau^2 + k^2)}$$

$$\Rightarrow b_1 = t_1 \wedge n_1 = \frac{\tau t + kb}{(\tau^2 + k^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \tau_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{(k\tau' - \tau k')(kt - \tau b)}{(\tau^2 + k^2)^{3/2}} \text{ లేక}$$

$$\tau_1{}^2 = \frac{(k\tau' - \tau k')^2}{(\tau^2 + k^2)^2 k^2 (c-s)^2} \text{ అవుతుంది.}$$

పై ఫలితములను $k^2 \tau = [t\ \ t'\ \ t'']$ ను ఉపయోగించి కూడ కనుగొనవచ్చును.



పటము 2.19

సూచన :

(1) ప్రతికేంద్రజము సమీకరణము $r_1 = r + (c-s)\,t$ లో ఒక పరామితి (c) ఉన్నది కావున ఇవ్వబడిన వక్రమునకు ఏక అనంత $[\infty']$ ప్రతికేంద్రజములు ఉంటాయి.

(2) $\mathbf{t}_1 = \frac{(c-s)\,k}{s_1}\,\mathbf{n}$ అవుతుంది కావున రెండు ప్రతికేంద్రజముల అనురూప బిందువుల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరము అవుతాయి. మరియు స్థిరదూరములో ఉంటాయి.

C పై స్థిరబిందువు P కి అనురూపముగ రెండు ప్రతికేంద్రజములు C_1, C_2 లపై బిందువులను తీసికొనిన

$$\mathbf{r}_1 = (c_1 - s)\,\mathbf{t} + \mathbf{r},\ \mathbf{r}_2 = (c_2 - s)\,\mathbf{t} + \mathbf{r} \Rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |c_1 - c_2|$$

స్థిరదూరము అవుతుంది.

2.24.2 వక్రము యొక్క కేంద్రజము :

ఇంతకుముందు సాధించిన సమస్యకు ఇది విలోమ సమస్య. అంతరాళములోని వక్రము C ప్రతికేంద్రజము అగు వక్రము G ను C యొక్క కేంద్రజము అంటాము.

అంతరాళములోని వక్రము $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అయిన దీని కేంద్రజమునకు గీసిన స్పర్శరేఖలు ఈ వక్రమునకు అభిలంబరేఖలు అవుతాయి, అనగ $P(\mathbf{r})$ వద్ద గీసిన అభిలంబరేఖ PP_1 వక్రము C_1 కు స్పర్శరేఖ అవుతుంది. కావున P_1 బిందువు C యొక్క అభిలంబతలములో ఉంటుంది.

అనగ $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{n}$; (λ, μలు s లో ప్రమేయములు) అవుతుంది.

$$\Rightarrow \mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = (1 - \mu k)\,\mathbf{t} + (\mu' - \lambda\tau)\,\mathbf{n} + (\lambda' + \mu\tau)\,\mathbf{b}$$

C యొక్క అభిలంబతలములో $\mathbf{t}_1$ ఉంటుంది కావున

$$\mathbf{t}_1 = A(\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{n}) \text{ మరియు } \mu = \rho\ ;\ \frac{\mu' - \lambda\tau}{\mu} = \frac{\lambda' + \mu\tau}{\lambda}\ (= A)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda^2 + \mu^2} = \frac{d}{ds}\cot^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \Rightarrow \tau\,ds = d\left(\cot^{-1}\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \int \tau ds = \cot^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + a.$$

$\int \tau ds$ ను $\phi(s)$ అనుకొనిన

$\lambda = \rho \cot[\phi(s) - a]$ లేక

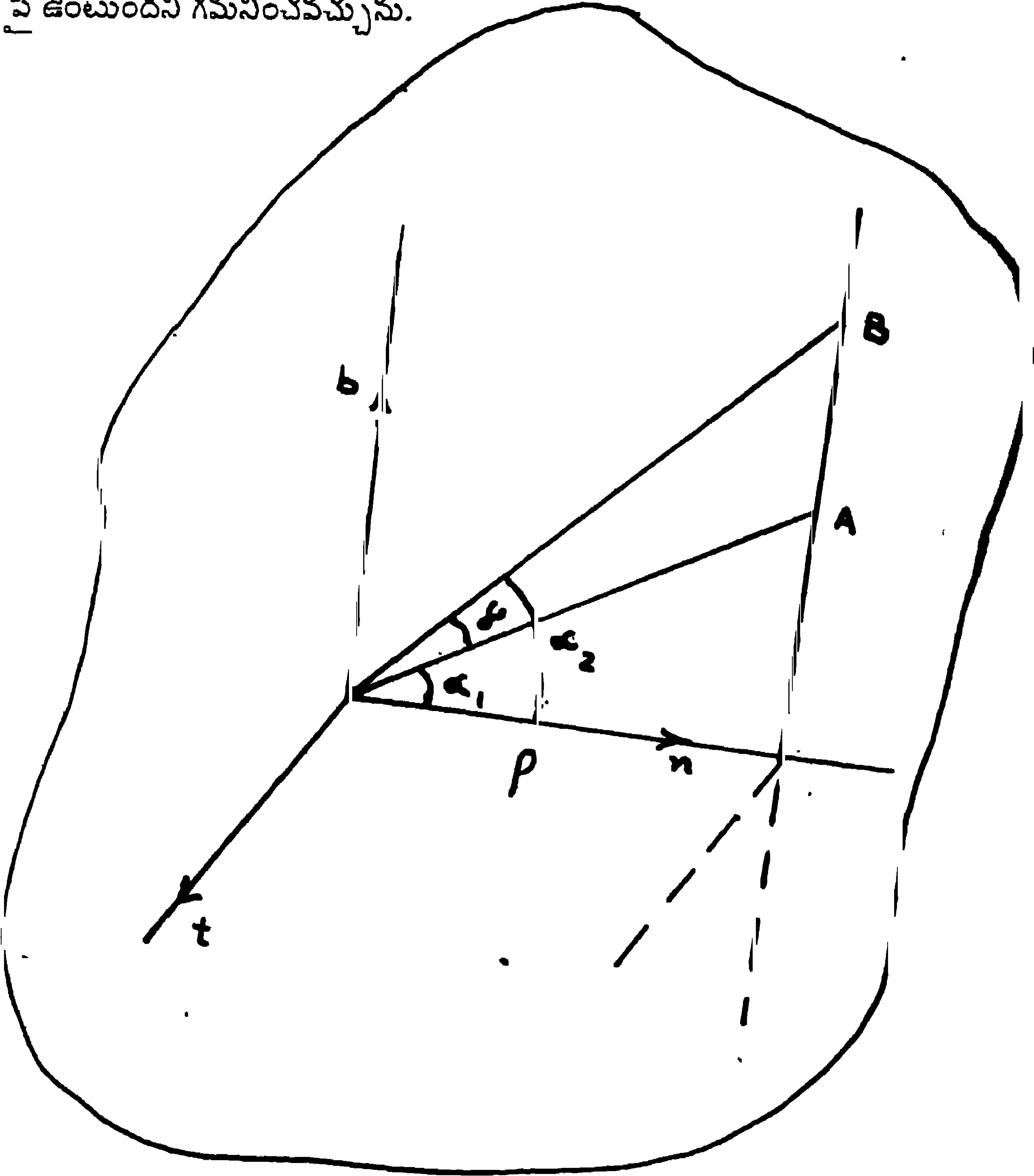
$\rho \tan[\phi(s) + c], c = \frac{\pi}{2} - a$

అవుతుంది కావున వక్రము యొక్క కేంద్రజ సమీకరణము

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} - \rho \tan[\phi(s) + c]\,\mathbf{b}$ అవుతుంది.

సూచన :

(1) వక్రము C యొక్క కేంద్రజ సమీకరణము నుండి కేంద్రజముపై కల బిందువు (A లే B) ఆ వక్రము C పై దాని అనురూప బిందువు P యొక్క ధృవాక్షము (2.19 చూడం పై ఉంటుందని గమనించవచ్చును.



పటము 2.20

(2) ఒక వక్రము యొక్క రెండు కేంద్రజములపై వక్రము యొక్క బిందువు అనురూపబిందువులు A, B లను కలుపురేఖ P వద్ద స్థిరకోణము చేస్తుంది. పటః లోని $P_1 P$ లేక పటము 20 లోని AP, యొక్క అభిలంబతలములో n తో ϕ (కోణము చేస్తుంది కావున

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \phi(s) + c_2 - [\phi(s) + c_1] - c_2 - c_1 =$ స్థిరకోణము.

అనగా ఈ కోణము $\phi(s)$ పై లేక P పై ఆధారపడదు.

కేంద్రజము యొక్క వక్రత, వివోటనములు :

కేంద్రజముపై కల చలన బిందువు యొక్క స్థానసదిశ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} - (\rho \tan\psi)\mathbf{b}\ ;\ \psi = \phi(s) + c, \frac{d\psi}{ds}\ [-\phi'(s)] = \tau$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \rho \quad + \rho\tau \tan\psi)(\mathbf{n} - \tan\psi\,\mathbf{b})$$

$$\Rightarrow \frac{ds_1}{ds} = (\rho^1 + \rho\tau\tan\psi)\sec\psi \text{ లేక } \frac{k\tau\sin\psi - k^1\cos\psi}{k^2\cos^2\psi}$$

కావున $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}\cos\psi - \mathbf{b}\sin\psi$

$$\Rightarrow k_1\mathbf{n}_1 = \frac{k\mathbf{t}\cos\psi}{(k^1\cos\psi - k\rho\sin\psi)/k^2\cos^2\psi}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{k^3\cos^3\psi}{k\tau\sin\psi - k^1\cos\psi},\ \mathbf{n}_1 \| \mathbf{t}$$

ప్రతి కేంద్రజ వక్రము యొక్క ధనాత్మక దిశను $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{t}$ అగునట్లు తీసికొనవలెను.

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{t}$ కావున

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n}_1 = \mathbf{b}\cos\psi + \mathbf{n}\sin\psi$$

$$\Rightarrow -\tau_1\mathbf{n}_1 \frac{k\tau\sin\psi - k^1\cos\psi}{k^2\cos^2\psi} = -k\sin\psi\,\mathbf{t}$$

$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{t}$ కావున

$$\tau_1 = \frac{-k^3\sin\psi\cos^2\psi}{(k\tau\sin\psi - k^1\cos\psi)} \text{ అవుతుంది.}$$

ఉదా 42 : వర్తులకుండలినికి ప్రతికేంద్రజము సమతలవక్రము అవుతుంది.

మొదటి పద్ధతి :

వర్తులకుండలినికి $\frac{k}{\tau}$ = స్థిరరాశి

$\Rightarrow \tau k^1 - k\tau^1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$

కావున వర్తుల కుండలిని యొక్క ప్రతికేంద్రజము సమతల వక్రము అవుతుంది.

రెండవ పద్ధతి :

వర్తులకుండలినికి సమీకరణము

$\mathbf{r} = (a \cos\theta, a \sin\theta, a\,\theta \tan\alpha)$

$\Rightarrow \mathbf{t}\dot{s} = (-a \sin\theta, a \cos\theta, a \tan\alpha) \Rightarrow \dot{s} = a \sec\alpha$ లేక

$s = a\,\theta \sec\alpha$ $\mathbf{t} = (-\sin\theta \cos\alpha, \cos\theta \cos\alpha, \sin\alpha)$

అవుతుంది కావున ఈ వక్రము యొక్క ప్రతికేంద్రజము సమీకరణము

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c - s)\,\mathbf{t} \Rightarrow x = a\cos\theta - (c - s)\sin\theta\cos\alpha,$

$y = a \sin\theta + (c - s)\cos\theta\cos\alpha,$

$z = \{a\,\theta\tan\alpha + (c - s)\sin\alpha\}$ $s = a\,\theta\sec\alpha$

కావున $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) - c\sin\theta\cos\alpha,$

$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) + c\cos\theta\cos\alpha, z = c\sin\alpha$ (స్థిరరాశి)

కావున వర్తులకుండలిని యొక్క ప్రతికేంద్రజము (xy –) సమతల వక్రము అవుతుంది. మరియు ఈ తలము స్థూపాక్షమునకు లంబముగ ఉంటుంది.

ఉదా 43 : వర్తుల కుండలినికి కేంద్రజము కనుగొనండి.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అను వక్రముయొక్క కేంద్రజము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} - \rho\tan[\phi(s) + c]\,\mathbf{b}$

చే సూచింపబడుతుంది.

వక్రమునకు

$\mathbf{t} = (-\sin\theta\cos\alpha, \cos\theta\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\Rightarrow \mathbf{kn} = \left(\frac{-\cos\theta\cos^2\alpha}{a}, \frac{-\sin\theta\cos^2\alpha}{a}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)\ \mathbf{b} = \mathbf{t}\wedge\mathbf{n} = (\sin\theta\sin\alpha, -\cos\theta\sin\alpha, \cos\alpha),$$

$$k = \frac{\cos^2\alpha}{a}, \tau = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}\ \phi(s) = \int \tau\, ds = \theta\sin\alpha$$

అవుతాయి కావున కేంద్రజ వక్రము

$$x = a\cos\theta - \rho\cos\theta - \rho\tan(\theta\sin\alpha + c)\sin\theta\sin\alpha,$$

$$y = a\sin\theta - \rho\sin\theta + \rho\tan(\theta\sin\alpha + c)\cos\theta\sin\alpha,$$

$z = a\theta\tan\alpha + \rho\tan(\theta\sin\alpha + c)\cos\alpha$ ల చే సూచింపబడుతుంది.

ఉదా 44 : $r = (3u, 3u^2, 2u^3)$ అను twisted ఘనవక్రమునకు ప్రతికేంద్రజ సమీకరణములు వ్రాయండి.

$$\mathbf{r} = (3u, 3u^2, 2u^3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}^1 = \mathbf{t} = (3u^1, 6uu^1, 6u^2u^1) = \left(\frac{1}{1+2u^2}, \frac{2u}{1+2u^2}, \frac{2u^2}{1+2u^2}\right)$$

$\frac{du}{ds} = \frac{1}{3(1+2u^2)}$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow s = 3u + 2u^3.$$

వక్రము యొక్క ప్రతికేంద్రజము

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (c - s)\,\mathbf{t}$$

అవుతుంది కావున కార్టీజియన్ నిరూపకములలో ఈ సమీకరణము

$$x = 3u + \frac{(c - 3u - 2u^3)}{1+2u^2}, y = 3u^2 + \frac{(c - 3u - 2u^3)\,2u}{1+2u^2},$$

$$z = 2u^3 + \frac{(c - 3u - 2u^3)\,2u^2}{1+2u^2}$$

లేక $x = \frac{c + u\,u^3}{1+2u^2}, y = \frac{2\,cu - 2u^2 + 2u^4}{1+2u^2}, z = \frac{2\,cu^2 - 4u^3}{1+2u^2}$ గా వ్రాయబడుతుంది.

ఉదా 45 : పై వక్రమునకు కేంద్రజము కనుగొనండి.

పై సమీకరణమును ఇంకను s దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన

$$kn = \left(\frac{-4u}{3(1+2u^2)^3}, \frac{2(1-2u^2)}{3(1+2u^2)^3}, \frac{4u}{3(1+2u^2)^3}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{3(1+2u^2)^2}, n = \left(\frac{-2u}{1+2u^2}, \frac{1-2u^2}{1+2u^2}, \frac{2u}{1+2u^2}\right),$$

$$b = \left(\frac{2u^2}{1+2u^2}, \frac{-2u}{1+2u^2}, \frac{1}{1+2u^2}\right) \text{ మరియు } \tau = \frac{2}{3(1+2u^2)^2} \text{ అవుతాయి.}$$

$$\psi = \int \tau ds = \int \frac{2}{3(1+2u^2)^2} 3(1+2u^2)\, du = \sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}u)$$

కావున కేంద్రజము సమీకరణము

$$r_1 = r + \rho n - \rho \tan\psi\, b$$

$$x = 3u + \frac{3(1+2u^2)^3}{2}\left(\frac{-2u}{1+2u^2}\right) - \frac{3(1+2u^2)^3}{2} \tan\psi \frac{2u^2}{1+2u^2}$$

$$y = 3u^2 + \frac{3(1+2u^2)^3}{2} \frac{1-2u^2}{1+2u^2} - \frac{3(1+2u^2)^3}{2} \tan\psi \left(\frac{-2u}{1+2u^2}\right)$$

$$z = 2u^3 + \frac{3(1+2u^2)^3}{2} \frac{2u}{1+2u^2} - \frac{3(1+2u^2)^3}{2} \tan\psi \frac{1}{1+2u^2}$$

లేక $x = -12u^3(1+u^2) - 3u^2(1+2u^2)^2 \tan(\sqrt{2} \tan^{-1}\sqrt{2}u)$

$$y = (1+4u^2-4u^4-8u^6) + 3u(1+2u^2)\tan(\sqrt{2} \tan^{-1}\sqrt{2}u),$$

$$z = (3u+14u^3+12u^5) - \frac{3}{2}(1+2u^2)^2 \tan(\sqrt{2} \tan^{-1}\sqrt{2}u)$$

గ వ్రాయబడుతుంది.

2.25. బెర్ట్రాండ్ వక్రములు :

అంతరాళములోని ఒక వక్రము C కి గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఇంకొక వక్రము C_1 కి కూడ ప్రధాన అభిలంబరేఖలయిన ఆ వక్రముల బిందువుల మధ్య అన్వేకానురూపత స్థితమవుతుంది. C_1 ను C యొక్క సంయుగ్మ (బెర్ట్రాండ్) వక్రము, సాహచర్యవక్రము లేక కము అని అంటాము.

ఒక వక్రము యొక్క ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఇంకొక వక్రమునకు ప్రధాన అభిలంబరేఖలయిన

(i) ఆ వక్రములపై కల అనురూపబిందువుల మధ్య దూరము స్థిరము.

(ii) అనురూపబిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య స్థిరకోణము ఉంటుంది.

(iii) ఒక్కొక్క వక్రము యొక్క వక్రత, వివోటనములు రేఖీయ సమాసములుగ వ్యక్తపరచబడుతాయి.

వక్రము C పై బిందువు P(**r**) కు అనురూపముగ C_1 పై $P_1(\mathbf{r}_1)$ బిందువు ఉండిన

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + a\mathbf{n}$, $(a = a(s))$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \mathbf{t}_1 s_1' = (1 - ak)\,\mathbf{t} + a'\,\mathbf{n} + a\,\tau\mathbf{b}.$

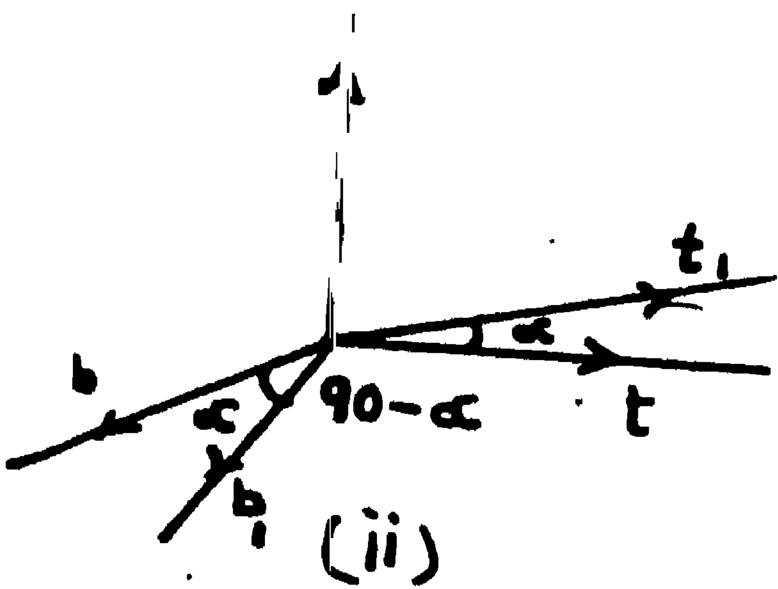
ఈ సమీకరణమునకు $\mathbf{n}\ (= \mathbf{n}_1)$ తో అదిశ లబ్దము తీసికొనిన $a' = 0$ అవుతుంది. అనగ 'a' అనురూపబిందువుల మధ్య స్థిరదూరము ఉంటుంది. —— (1)

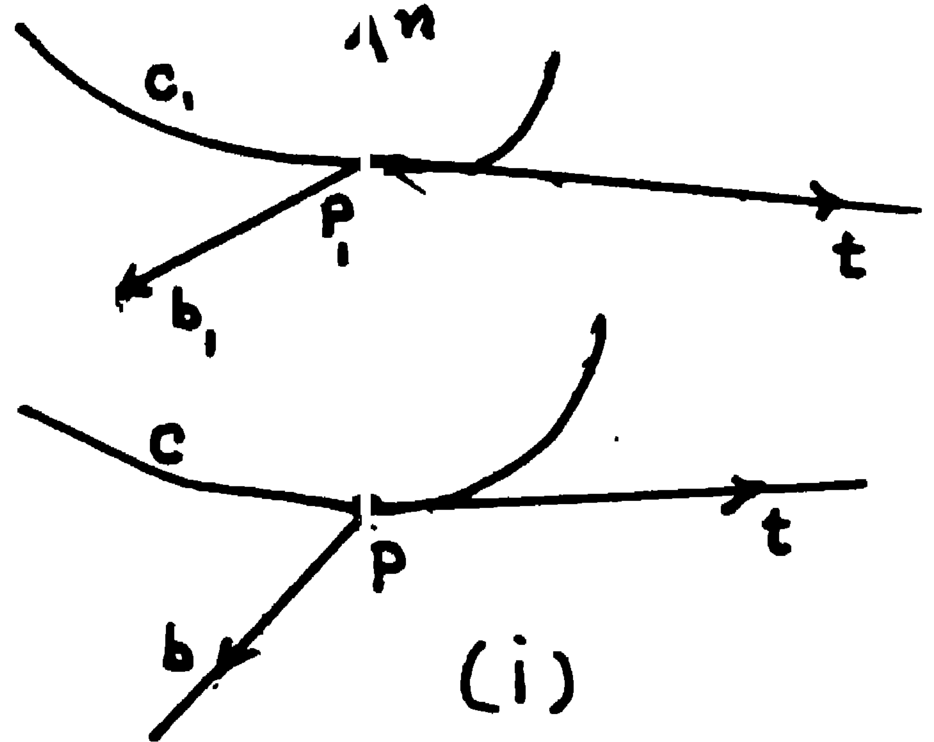
$\mathbf{t}_1 s_1' = (1 - ak)\,\mathbf{t} + a\,\tau\,\mathbf{b}$; $\mathbf{t}.\,\mathbf{t}_1 = \cos\theta$ (θ స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము)

$\Rightarrow (-\sin\theta)\,\theta' = k\mathbf{n}.\,\mathbf{t}_1 + k_1\,\mathbf{n}_1.\,\mathbf{t}\,s_1' = 0 \ (\because\ \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}) \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = 0$

అనగా వక్రముల అనురూపబిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య స్థిరకోణము ఉంటుంది.

—— (2)





పటము 2.21

t, b లు ; t_1, b_1 లు n కు లంబములు కావున ఒకే సమతలములో (చాపకలనీయ సమతలములో) ఉంటాయి. t, t_1 ల మధ్యకోణము α అయిన b, b_1 ల మధ్యకోణము కూడా α అవుతుంది (పటము - 21 (ii)) కావున

$$t_1 = t\cos\alpha + b\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

కాని $t_1 = [(1-ak)t + a\tau b]\dfrac{ds}{ds_1}$,

$$\Rightarrow \frac{1-ak}{\cos\alpha} = \frac{a\tau}{-\sin\alpha}\left(=\frac{ds_1}{ds}\right)$$

$\Rightarrow (a\sin\alpha)k + (-a\cos\alpha)\tau - \sin\alpha = 0$ — (3) అవుతుంది.

ఉదా 46 : Mannhein సిద్ధాంతము :

రెండు బెర్ట్రాండ్ వక్రముల అనురూప బిందువుల వద్ద విమోటనములు ఒకే గుర్తు కలిగి ఉంటాయి. వాటి లబ్ధము స్థిరరాశి. C, C_1 లు వాటి వక్రతా కేంద్రములయిన వజ్రనిష్పత్తి (PCP_1C_1) P పై కాని C పై కాని ఆధారపడదని చూపండి.

(i) వక్రము విమోటనము $= \tau = \dfrac{-\sin\alpha}{a}\dfrac{ds_1}{ds}$

$\Rightarrow$ బెర్ట్రాండ్ వక్ర విమోటనము $= \tau_1 = \dfrac{-\sin\alpha}{a}\dfrac{ds}{ds_1}$

కావున ఈ వక్రముల విమోటనములు ఒకే గుర్తు కలిగి ఉంటాయి.

$\tau\tau_1 = \dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}$ (స్థిరరాశి)

(ii) ఒక సరళరేఖపై కల (4) బిందువులు A, B, C, D లకు $\dfrac{AB\,|\,BC}{AD\,|\,DC}$ ని వజ్రనిష్పత్తి అంటాము. దీనిని (ABCD) చే సూచిస్తాము.

$\dfrac{PC\,|\,CP_1}{PC_1\,|\,C_1P_1}$ లేక $\dfrac{PC.\,P_1C_1}{PC_1.\,P_1C} = \dfrac{|\rho n|\;|\rho_1 n|}{|r_1 - r - \rho n|\;|r - r_1 - \rho_1 n|}$ అవుతుంది.

$(P, P_1, C, C_1$ ల స్థానసదిశలు $r, r_1, r+\rho n, r_1+\rho_1 n$ అవుతాయి)

$$\Rightarrow (PC\,P_1\,C_1) = \frac{\rho\rho_1}{|a-\rho|\;|a+\rho_1|} = \frac{1}{|(ak-1)\,(ak_1+1)|} = \sec^2\alpha.$$

ఇది P, P_1 లపై ఆధారపడిలేదు కావున అన్ని అనురూపబిందువుల వద్ద వక్రజనిష్పత్తి ఒకటే ఉంటుంది.

2.25. వక్రముల మౌలిక సిద్ధాంతము :

s యొక్క ధనాత్మక వాస్తవ విలువలకు రెండు ఏకమూల్య అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు k(s), τ(s) లు ఇవ్వబడిన వాటికి అనురూపముగ అంతరాళములో ఒకే ఒక వక్రము వ్యవస్థితమవుతుంది. దీని వక్రత k, విమోటనము τ అవుతాయి. ఈ వక్రము చాపము (తగుబిందువునుండి) s అవుతుంది. అయితే అంతరాళములో ఈ వక్రము యొక్క స్థానము మారవచ్చును.

వ్యవస్థితము : k, τ లు s యొక్క అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు కావున

$$\frac{d\alpha}{ds} = k\beta, \frac{d\beta}{ds} = \tau r - k\alpha, \frac{d\gamma}{ds} = -\tau\beta \qquad \text{—— (1)}$$

అను అవకలన సమీకరణములకు సాధనము వ్యవస్థితమవుతుంది.

అవకలన సమీకరణ శాస్త్రములో సమీకరణముల సాధనమునకు సంబంధించి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము $-\frac{dy_i}{dx} = f_i\ (x, y_1, y_2 \dots y_n), i = 1, 2, 3, \dots n$ అను సమీకరణములు ఒక అంతరాళములో f_i అవిచ్ఛిన్నము మరియు ఏకమూల్యములు, Lipschize నియమము పాటింపబడిన (ఈ సందర్భములో పాటింపబడుతుంది) సాధనముల సముదాయము ఏకైకము - గురించి తెలిసికున్నాము. అనగ $x = x_0$ వద్ద $y_1°, y_2°, \dots y_n°$ అగు సాదనము వ్యవస్థితమవుతుంది. కావున పై అవకలన సమీకరణములు (1) కు 3 అవిచ్ఛిన్న సాదనములు ఏకైక రీతిలో $\alpha_1(s), \beta_1(s), \gamma_1(s)$ గ ఉంటాయి. $S = S_0$ వద్ద ఇవి 1, 0, 0 అవుతాయి. అట్లె

$$\alpha_2(s_0) = 0, \beta_2(s_0) = 1, \gamma_2(s_0) = 0\,; \alpha_3(s_0) = 0, \beta_3(s_0) = 0, \gamma_3(s_0) = 1$$

ఏకైక రీతిలో అవుతాయి.

ఇప్పుడు

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)' = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 2(k\alpha\beta + \tau\beta\gamma - k\alpha\beta - \tau\beta\gamma) = 0$$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 =$ స్థిరరాశి

$\Rightarrow \alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2 = 1, (i = 1, 2, 3)$(తొలినియమములనుండి),

$$(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)' = (\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2') + (\alpha_1'\alpha_2 + \beta_{12} + \gamma_1'\gamma_2) = 0$$

$$\Rightarrow (k\alpha_1\beta_2 + \tau\beta_1\gamma_2 - k\beta_1\alpha_2 - \tau\gamma_1\beta_2) + (k\alpha_2\beta_1 + \tau\beta_2\gamma_1 - k\beta_2\alpha_1 - \tau\gamma_2\beta_1) = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 =$ స్థిరరాశి $= 0$ (తొలినియమములనుండి).

అట్లే ఇతర సమీకరణములు కనుగొనవచ్చును.

$(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 = 0, \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1\ 0)$.

ఈ ఫలితమునుండి $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ లంబమాత్రిక అవుతుంది.

$\Rightarrow AA^T = A^TA = I$ లేక $A^T = A^{-1}$.

కావున పై సమీకరణములను పోలిన (6) సమీకరణములు వస్తాయి. అవి

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1, \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1, \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1;$$

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0, \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3 = 0, \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3 = 0.$$

వీటినుండి $\mathbf{t} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. $\mathbf{n} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\mathbf{b} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ లంబసదిశ త్రికము ఏర్పడుతుంది. వీటి విఘటనములన్నియు s యొక్క ప్రమేయములు కావున ∞^1 $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ త్రికములుంటాయి.

t ని s దృష్ట్యా సమాకలనము చేసిన

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{t}\, ds \text{——} (2)$$

ఒక వక్రమును సూచిస్తుంది. దీనికి t స్పర్శరేఖ మాత్రమే కాక (1) నుండి $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ లంబ సదిశా త్రికము, k, τ లు ఈ వక్రము యొక్క వక్రత, విమోటనములు అవుతాయి. అనగా నిర్దిష్ట వక్రము వ్యవస్థితము అని అర్థము.

ఏకైకత్వము :

వీలైనచో నిర్దిష్ట వక్రములు (k వక్రత, τ విమోటనము కలవి) రెండు

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s); \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s)$$

కలవనుకుందాము. ధృఢ చలనము వలన వీటి తొలి బిందువులను తద్వారా తొలిబిందువు వద్ద కల $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ త్రికమును ఏకీభవించునట్లు చేయవచ్చును.

అనగా $s = 0$ వద్ద

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$$

అవుతాయి.

ఫ్రినేట్ సూత్రముల ప్రకారము s వద్ద

$$(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)' = \mathbf{t}_1 \cdot (k_2 \mathbf{n}_2) + k_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot (\tau_2 \mathbf{b}_2 - k_2 \mathbf{t}_2)$$
$$+ \mathbf{n}_2 \cdot (\tau_1 \mathbf{b}_1 - k_1 \mathbf{t}_1) - \mathbf{b}_1 \cdot \tau_2 \mathbf{n}_2 - \mathbf{b}_2 \cdot \tau_1 \mathbf{n}_1$$

$$k_1 = k_2, \tau_1 = \tau_2$$

కావున RHS = 0 అవుతుంది.

$\Rightarrow \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 =$ స్థిరరాశి.

$s = 0$ వద్ద ఈ రాశి 3 అవుతుంది. $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ లు యూనిట్ సదిశలు మరియు వాటి అదిశ లబ్ధముల మొత్తము (అంతర్లబ్ధము) 3 కావున

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2' = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = c \text{ (స్థిరరాశి)}$$

తొలి నియమముచే $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) \Rightarrow c = 0$

అనగా s యొక్క అన్ని విలువలకు $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ అవుతుంది. కావున వక్రము ఏకైకము.

తొలి బిందువులను, సదిశాత్రికములను ఏకీభవింపచేయుట వలన వక్రముల స్థా Orientation మాత్రమే మారినవి వక్రముల ధర్మములు మారలేదు.

2.26. సర్వసమాన వక్రములు :

రెండు వక్రములను ధృఢ చలనము వలన ఏకీభవింపచేసిన అవి సర్వసమాన వక్రమ అవుతాయి.

అంతర్లీన (సహజ) సమీకరణములు :

ఒక వక్రము యొక్క సమీకరణములు ఆ వక్రముయొక్క వక్రత, వివోటనము వక్రచాప ప్రమేయములుగ వ్యక్త పరచిన అవి అంతర్లీన సమీకరణములు అవుతాయి.

వక్రముల మౌలిక సిద్ధాంతమును ఒకే సహజ సమీకరణములు కల వక్రములు సర్వస వక్రములవుతాయని కూడ చెప్పవచ్చును.

ఉదా 47 : $\rho = \sigma = \frac{s^2+4}{\sqrt{2}}$ స్వాభావిక సమీకరణములుగా కల వక్రమును నిర్ధారించుము.

ప్రాథమికముగ $\frac{k}{\tau} = 1$ (స్థిరరాశి) కావున వక్రము కుండలిని అవుతుంది, స్థూ యొక్క జనకరేఖతో $\frac{\pi}{4}$ కోణము చేస్తుంది. అయితే వివరముగ పరిశీలిస్తే $t = (x^1, y^1,$ జనకరేఖ z – అక్షము అనుకుంటె

$$z^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$t = \left(x^1, y^1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), |t| = 1 \Rightarrow {x^1}^2 + {y^1}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x' = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}, y' = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}},$$

$$t' = kn = (x'', y'', 0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-\sin\phi}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \frac{2}{(s^2+4)^2} \text{ (దత్తాంశము)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{s}{2} \text{ లేక } \tan\phi = \frac{s}{2} \text{ అవుతుంది.}$$

$$\Rightarrow x^1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s^2+4}}, y^1 = \frac{s}{\sqrt{2}\sqrt{s^2+4}} \Rightarrow x = \sqrt{2}\ \sinh^{-1}\frac{s}{2}, y = \frac{\sqrt{2}\sqrt{s^2+4}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2} \cosh \frac{x}{\sqrt{2}}$$

మాతావక్రము ఆధారముగా కల స్థూపముపై కుండలిని దత్త వక్రము అవుతుంది.

ఉదా 48 : $x = ae^4 \cos h, y = ae^4 \sin u, z = be^4 e^*$ వక్రమునకు సహజ సమీకరణము వ్రాయండి.

$$r = (ae^4 \cos u, ae^4 \sin u, be^4) \Rightarrow r' = t$$

$$= [ae^4 (\cos u - \sin u) u^1, ae^4 (\sin u + \cos u ,, u^1 be^4 u^1]$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{du} = e^4 (2a^2 + b^2)^{1/2} \Rightarrow s = (2a^2 + b^2)^{1/2} e^4 ;$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{a \cos u - \sin u}{(2a^2 + b^2)^{1/2}}, \frac{a (\sin u + \cos u)}{(2a^2 + b^2)^{1/2}}, \frac{b}{(2a^2 + b^2)^{1/2}}\right)$$

$$\Rightarrow kn = \left(\frac{- a (\sin u + \cos u)}{e^4 (2a^2 + b^2)}, \frac{a (\cos u - \sin u)}{e^4 (2a^2 + b^2)}, 0\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}\ a}{e^4 (2a^2 + b^2)}, n = \left(\frac{- (\sin u + \cos u)}{\sqrt{2}}, \frac{(\cos u - \sin u)}{\sqrt{2}}, 0\right);$$

$$b = t \wedge n = \left(\frac{b (\sin u - \cos u)}{\sqrt{2} (2a^2 + b^2)^{1/2}}, \frac{- b (\sin u + \cos u)}{\sqrt{2} (2a^2 + b^2)^{1/2}}, \frac{2a}{\sqrt{2} (2a^2 + b^2)^{1/2}}\right)$$

$$\Rightarrow - \tau n = \left(\frac{b (\sin u + \cos u)}{\sqrt{2} (2a^2 + b^2) e^4}, \frac{- b (\cos u - \sin u)}{\sqrt{2} (2a^2 + b^2) e^4}, 0\right)$$

కావున $\tau = \frac{b}{e^4 (2a^2 + b^2)}$ అవుతుంది.

ఈ వక్రము యొక్క సహజ సమీకరణములు

$$k = \frac{a \sqrt{2}}{s (2a^2 + b^2)^{1/2}}, \tau = \frac{b}{s (2a^2 + b^2)^{1/2}}$$ అవుతాయి.

2.27 సహజ సమీకరణముల సాధన – విస్తృత పద్ధతి :

$k(s), \tau(s)$ లు 3 - వ తరగతి కాని అంతకు ఎక్కువ తరగతికి కాని చెందిన

$$\frac{d\alpha}{ds} = k\beta, \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma - k\alpha, \frac{d\gamma}{ds} = -\tau\beta \qquad \text{—— (A)}$$

ల నుండి β, γ లను తొలగించి α లో 3 – వ పరిమాణపు అవకలన సమీకరణమును :

వచ్చును. అయితే దీని సాధనము

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = (1 + \gamma)(1 - \gamma) \qquad \text{—— (1)}$$

అను Riccati సమీకరణమును సాధించుటగ మారుతుంది.

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}\ ; \frac{-1}{z} = \frac{\alpha - i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha + i\beta} \text{ లు} \qquad \text{—— (2)}$$

సంయుగ్మ సంకీర్ణ ప్రమేయాలు అవుతాయి.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1 - wz}{w - z}, \beta = i\frac{1 + wz}{x - z}, \gamma = \frac{w + z}{w - z} \qquad \text{—— (3)}$$

సమీకరణము (2) ను s దృష్ట్యా అవకలనము చేసి (A) ను ఉపయోగించిన

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - \gamma} + \frac{\alpha + i\beta h}{(1 - \gamma)^2}\gamma = \frac{k\beta - ik\alpha + i\tau\gamma + w\tau\beta}{1 - \gamma}$$

$$= -ikw + \tau\frac{(i\gamma - \beta w)}{1 - \gamma} \qquad \text{—— (4)}$$

(3) సమీకరణము నుండి

$$z = \frac{(\gamma - 1)\,w}{\gamma + 1} \Rightarrow \beta = \frac{i\,(1 + \gamma - w^2 + \gamma w^2)}{2w} \qquad \text{—— (5)}$$

(4), (5) లనుండి β ను తొలగించిన

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{i\tau}{2} - ikw + \frac{i\tau w^2}{2} \qquad \text{—— (6)}$$

ఇదే విధముగ $\frac{dz}{ds}$ ని కూడ వ్యక్త పరచవచ్చును.

సమీకరణము (6) ను Riccati సమీకరణము అంటాము.

$$w, z \text{ లు } \frac{df}{ds} = A + Bf + cf^2\ ; A = \frac{-i\tau}{2}, \beta = -ik \qquad \text{—— (7)}$$

అను Riccati సమీకరణమునకు సాధనములు అవుతాయి.

దీని సాధారణ సాధనము

$f = \frac{aP + Q}{aR + S}$ (a యాదృచ్ఛి స్థిరాంకము, P, Q, R, S లు చాపము (s) యొక్క ప్రమేయములు) అవుతుంది.

నిరూపకముల నిర్ధారణ :

α_i, b_i, γ_i, (i = 1, 2, 3) లను కనుగొనుటకు w_i కలిగిన మూడు సమాకలనులు (యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకము a_i తో), z_i కలిగిన మూడు సమాకలనులు (యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకము b_i తో) మనకు అందుబాటులో ఉండాలి.

$$\alpha_1 = \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1},\ \beta_1 = i\frac{1 + w_1 z_1}{w_1 - z_1},\ \gamma_1 = \frac{w_1 + z_1}{w_1 - z_1}$$

మొదలగునవి. ఈ (9) ప్రమేయములు $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ లు అభిలంబ నియమములు

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0 \ (i \neq j, 1, 2, 3)$$

పాటించును. వీటిలో మొదటి (3) సమీకరణములు స్వతహాగ పాటింపబడుతాయి (సమీకరణము 2) మిగిలిన (3) సమీకరణములను పాటించునట్లు a_i, b_i లను తీసికుంటాము. వేరేవిధాలుగ a_i, b_i' లను తీసికొనవచ్చు వక్రములు ఈ విధముగ వచ్చు వక్రములకు సర్వసమానమవుతాయి.

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \Rightarrow (1 - w_1 z_1)(1 - w_2 z_2) + (w_1 + z_1)(w_2 + z_2)$$
$$= (1 + w_1 z_1)(1 + w_2 z_2)$$
$$\Rightarrow 2(w_1 z_1 + w_2 z_2) = w_1 z_2 + w_2 z_1 + w_1 w_2 + z_1 z_2^1$$

సమీకరణము (8) నుండి $w_1, w_2, ; z_1, z_2$ ల విలువలను $a_1, a_2 ; b_1, b_2$ లనుపయోగించి పై సమీకరణములో వ్రాసిన ఈ స్థిరాంకముల మధ్యకూడ ఇటువంటి సంబంధము

$$2(a_2 b_2 + a_3 b_3) = a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_2 a_3 + b_2 b_3$$

$$2(a_2 b_2 + a_3 b_3) = a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_2 a_3 + b_2 b_3$$

$$2(a_3 b_3 + a_1 b_1) = a_3 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + b_3 b_{11}$$ —— (9) వ్యవస్థితమవుతుంది.

a_i, b_i అను (6) చలనరాశులు కలిగిన ఈ (3) సమీకరణముల సాధనము వక్రము యొ

నిరూపకములను సూచిస్తుంది. ఒక సాధారణ సాధనము

$a_1 = 1, a_2 = i, a_3 = \infty, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -i, b_3 = 0$ అవుతుంది.

కావున $w_1 = \frac{P+Q}{R+S}$.

ఇట్లే w_2, w_3, z_1, z_2, z_3 లు వ్రాయవచ్చును.

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1} = \frac{(P^2 - Q^2) - (Q^2 - S^2)}{2\,(PS - QR)},$$

$$\alpha_2 = i\frac{[(P^2 - R^2) + (Q^2 - S^2)]}{2\,(PS - QR)},$$

$$\alpha_3 = \frac{RS - PQ}{PS - QR} \text{ అవుతాయి.} \qquad \text{—— (10)}$$

వక్రము $x = \int^s \alpha_1\, ds, y = \int^s \alpha_2\, ds, z = \int^s \alpha_3\, ds$ —— (11)

లచే సూచింపబడుతుంది, దీని వక్రత $k(s)$, విమోటనము $\tau(s)$ అవుతుంది.

సూచన : స్థూపముపై గీసిన కుండలినికి $\frac{k}{\tau} = c$ అవుతుంది కావున

$$\frac{df}{ds} = \frac{-i\tau}{2}\,(1 + 2cf - f^2)$$

అవుతుంది. దీని ప్రత్యేక సమాకలములు $f^2 - 2cf - 1 = 0$ యొక్క మూలములు అనగ

$f = c \pm \sqrt{c^2 + 1} = f_1, f_2$ అవుతాయి కావున

$(f - f_1)(f - f_2) = a\, e^{\int c (f_2 - f_1)\, ds}$ అవుతుంది.

ఇచట $c = \frac{i\tau}{2}, p = f_2 e^{it}, Q = -f_1, R = e^{it}, S = -1$

అవుతాయి కావున వక్రము $x = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \int \cos t\, ds$

$y = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \int \sin t\, ds, z = \frac{s}{\sqrt{c^2 + 1}}$ లచే సూచింపబడుతుంది.

అధ్యాయము 2 పై సమస్యలు

1. $(3t, 3t^2, 2t^3)$ చే సూచింపబడు వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ $y = z - x = 0$ తో $\frac{\pi}{4}$ కోణము చేస్తుందని చూపండి.

2. $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$ అను ఏకనాభీయ శాంకవజముల ఛేదన వక్రమునకు ($\lambda = 0, \lambda = 1$ లకు) స్పర్శరేఖా సమీకరణములు

$$\frac{x (X - x)}{a^2 (b^2 - c^2) (a^2 - \lambda_1)} = \frac{y (Y - y)}{b^2 (c^2 - a^2) (b^2 - \lambda_1)} = \frac{z (Z - z)}{c^2 (a^2 - b^2) (c^2 - \lambda_1)}$$

అని చూపండి.

రెండు వక్రముల మధ్య స్పర్శ :

3. $l x + my + nz = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ అను వృత్తమునకు $ax^2 + by^2 = 2z$ అను పరావలయముతో మూలబిందువు వద్ద 2 వ పరిమాణపు స్పర్శ వ్యవస్థితమని చూపండి.

4. $(u \cos \theta, u \sin \theta, c \sin z\theta)$ కు (u, θ) వద్ద గీయబడిన నతిపరివర్తన (inflexional)(2 - వ పరిమాణపు స్పర్శ కల స్పర్శరేఖలు) స్పర్శరేఖలను కనుగొని అవి లంబములయిన (u, θ) యొక్క బిందు పథము కనుగొనండి.

5. $x^4 + 3xyz + x^2 - y^2 - z^2 + 2yz - 3xy - 2y + 2z = 1$ అను ఉపరితలముపై $(0, 0, 1)$ వద్ద 3 - వ పరిమాణపు స్పర్శ కలిగిన సరళరేఖలు కనుగొనండి.

6. మూలబిందువు వద్ద $(t^4 - 1, t^3 - 1, t^2 - 1)$ వక్రముతో 2 - వ పరిమాణపు స్పర్శకలిగిన సమతలము $3x - 8y + 6z = 0$ అనిచూపండి.

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 2z$ అను పరావలయజముతో $(t^3 - 2t^2 + 1, t^3 - 1, t^2 - 2t + 1)$ వక్రమునకు గరిష్ఠ పరిమాణపు స్పర్శ ఉండిన a, b, h లను, పరిమాణమును కనుగొనండి.

8. $y^2 = 4cx$ అను ఉపరితలముపై గీయబడిన నతిపరివర్తన స్పర్శరేఖలు కనుగొనండి. సంస్పర్శకతలము.

9. $(a \cos \theta, a \sin \theta, c\theta)$ పై θ వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$x \cos\theta - y \sin\alpha + \frac{az}{c} = a\theta$ అని చూపండి.

10. ఒక సమతల వక్రము యొక్క సంస్పర్శకతలము ఆ వక్రమును, కలిగి ఉంటుంద చూపండి.

11. (u, u^2, u^3) యొక్క సంస్పర్శక తల సమీకరణము వ్రాసి, వక్రముపై ఏవైన బిందువుల వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతలములు ఆ బిందువుల ద్వారపోవు సమతలము ఖండించుకుంటాయని చూపండి.

12. $(3au, 3bu^2, cu^3)$ నకు u = వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ అని చూపి ఈ వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖలు ఈ సమతలము $(a(2u+1), bu \quad (u+2), cu^2)$ పై ఖండించుకుంటాయని చూపండి.

13. ఒక వక్రముపై P, Q లు రెండు సామీప్యబిందువులు, PT అనునది P వద్ద గీసి స్పర్శరేఖ అయిన $Q \to P$ అయినపుడు సమతలము PQT ఆ వక్రమునకు P వ గీసిన సంస్పర్శకతలము అవుతుంది.

14. $e^{ax} = \frac{b-t}{c-t}, e^{by} = \frac{c-t}{a-t}, e^{cz} = \frac{a-t}{b-t}$ అను వక్రము $ax + by + cz = 0$ అ సమతలముతో ఉంటుందని చూపండి.

15. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2$ అను స్థూపముల ఛేదన వక్రమునకు (x_1, y_1, z_1) వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము $b^2(xx_1^3 - zz_1^3 - a^4) = a^2(yy_1^3 - zz_1^3 - b^4)$ అని చూపండి.

16. ఒక వక్రమునకు గీసిన సంస్పర్శకతలము స్థిరబిందువు ద్వార పోయిన ఆ వక్రము సమతల వక్రము అవుతుందని చూపి $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z(x^4 + y^4 + z^4) = a^4$ ఛేదన వక్రము 'a' వ్యాసార్ధము కల వృత్తమవుతుందని చూపండి.

17. $r = at^3 + 3bt^2 + 3ct + d$ పై (3)) బిందువుల వద్ద గీసిన సంస్పర్శక తలములు మూలబిందువు ద్వారాపోయిన ఆ బిందువులు $3[rbc] = [rad]$ అను సమతలములో ఉంటాయని చూపండి.

18. మూడు ఏకనాభీయ శాంకవజములు

$$\frac{x^2}{a^2+\Delta}+\frac{y^2}{c^2+\Delta}+\frac{z^2}{c^2+\Delta}=1\ (\Delta=0,\lambda,\mu),$$ (x_1, y_1, z_1) వద్ద ఖండించుకొనిన ఈ బిందువు వద్ద $\Delta = 0, \lambda$ ల ఖండన వక్రమునకు గీయబడిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$\frac{xx_1(a^2+\mu)}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{yy_1(b^2+\mu)}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{zz_1(c^2+\mu)}{c^2(c^2+\lambda)}=1$$ అనిచూపండి.

19. $(a\cos\theta, a\sin\theta, c\theta)$ అనుకుండలిని యొక్క ఉపాభిలంబరేఖలకు సమాంతరముగ మూలబిందువు నుండి గీయబడిన రేఖలు $a^2(x^2+y^2)$ అనుశంకువుపై ఉంటాయని చూపండి.

20. $(a\sin t,\ a\cos t,\ a\tan\theta\ t)$ కి గీయబడిన (i) ప్రధాన అభిలంబరేఖలు, (ii) ఉపాభిలంబరేఖలు 2 అక్షముతో స్థిరకోణము చేస్తాయని చూపండి.

21. $(4a\cos^3\theta, 4a\sin^3\theta, 3c\cos 2\theta)$ అను వక్రమునకు గీయబడిన (i) స్పర్శరేఖ, (ii) ప్రధాన అభిలంబరేఖ, (iii) ఉపాభిలంబరేఖ, (iv) సంస్పర్శక తలముల కనుగొనండి.

ఫ్రెనెట్ – సెర్రెట్ సూత్రములు :

22. (i) $[\mathbf{t}^1\ \mathbf{t}^{11}\ \mathbf{t}^{111}] = k^3(k\tau^1 - k^1\tau)$, (ii) $[\mathbf{b}^1\ \mathbf{b}^{11}\ \mathbf{b}^{111}] = \tau^3(k^1\tau - k\tau^1)$ అని చూపండి.

23. ఒక వక్రము సరళరేఖ అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $k = 0$ అని చూపండి.

24. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ వక్రమునకు స్థిరవిమోటనము ఉండిన $\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau} + \int \mathbf{b}\,ds$ కు స్థిరవక్రత ఉంటుంది.

25. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అనువక్రము k వక్రతకలకుండలిని అయిన $\mathbf{r} = \rho\mathbf{t} - \int \mathbf{n}\,ds$ కూడ కుండలిని అవుతుందని చూపండి.

26. ఒక వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖలు స్థిరదిశతో θ, ϕ కోణములు చేసిన $\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{-k}{\tau}$ అని చూపండి.

27. ఒక వక్రమునకు గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖలు ఇంకొక వక్రమునకు ఉపాభిలంబ రేఖలయిన $\frac{k}{k^2 + \tau^2}$ స్థిరరాశి అని చూపండి.

28. స్థిరవిమోటనము కల వక్రమునకు గీసిన ఉపాభిలంబరేఖపై వక్రమునుండి (c) దూరములో ఒక బిందువు P కలదు. P చలన బిందువుగా కల వక్రమునకు గీసిన ఉపాభిలంబరేఖ దత్తవక్రము యొక్క ఉపాభిలంబరేఖతో $\tan^{-1} \frac{c\tau^2}{k\,(c^2\tau^2 + 1)^{1/2}}$ కోణము చేస్తుంది.

29. ఒక వక్రము పై చలించు కణము వేగము **v**, త్వరణము **f** అయిన ఆ వక్రము యొక్క వక్రత $\frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{f}|}{|\mathbf{v}|^3}$ అని చూపండి.

30. మూలబిందువు దృష్ట్యా **t, n, b** ల భ్రామకాలు $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ అయిన $\mathbf{m}_1 = k\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2'' = \mathbf{b} - k\,\mathbf{m}_1 + \tau\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3 = -\mathbf{n} - \tau\mathbf{m}_2$ అని చూపండి.

31. $(a \cos\theta, a \sin\theta, f(\theta))$ ఒక సమతలీయ వక్రమును సూచించిన $f(\theta)$ ను కనుగొనండి.

32. ఒక వక్రము యొక్క చలన బిందువు

$$\frac{d}{ds}\left[\sigma \frac{d}{ds}(\rho\, r'')\right] + \frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{\rho}\, r'\right) + \frac{\rho}{\sigma}\, r'' = 0$$

అను అవకలన సమీకరణమును సంతృప్తి పరుస్తుందని చూపండి.

33. (i) స్పర్శరేఖలు (a) సమాంతరమయిన, (b) స్థిరబిందువు ద్వారా పోయిన వక్రము సరళరేఖ అని (ii) సంస్పర్శకల తలములు (a) స్థిరబిందువు ద్వారాపోయిన, (b) పరస్పరము సమాంతరము అయిన వక్రము సమతలవక్రము అవుతుందని చూపండి.

34. 4 కంటె ఎక్కువ తరగతి వక్రముల బిందువులు

$$\frac{d^4 r}{ds^4}\left(\frac{2k^1}{k} + \frac{\tau^1}{\tau}\right)\frac{d^3 r}{ds^3} + \left[\frac{k^2 + \tau^2 + k^1\tau^1}{k\tau} + \frac{2k^{1^2} - kk^{11}}{k^2}\right]\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$$

$$+ k^2\left(\frac{k^1}{k} - \frac{\tau^1}{\tau}\right)\frac{dr}{ds} = 0$$ ను సంతృప్తిపరుస్తాయని చూపండి.

35. ఒక వక్రమునకు ఒక బిందువు వద్ద గీసిన ఉపాభిలంబరేఖ, రెండు సామీప్యబిందువుల వద్ద వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖల అల్పతమ దూరము యొక్క అవధిరూపము.

36. ఒక వక్రము సతలీయము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $[t \ t' \ t''] = 0$.

37. **Combescure** పరివర్తనము : రెండు వక్రముల బిందువుల మధ్య అన్యేక అనురూపత వ్యవస్థితము మరియు అనురూప బిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శారేఖలు సమాంతరము - అయిన (i) ప్రధాన లంబరేఖలు (తద్వార ఉపాభిలంబరేఖలు) సమాంతరము అనియు, (ii) $\frac{k_1}{k} = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{ds}{ds_1}$ అనియు చూపండి.

38. ఒక వక్రముపై P వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ t వెంబడి PQ = C అగునట్లు Q గుర్తింపబడిన P వద్ద గీసిన సంస్పర్శకతలమునకు t సమాంతరము అని చూపి Q బిందుపథము సరళరేఖ అగుటకు నియమము కనుగొనండి.

39. (i) వైశ్లేషిక పద్ధతితో, (ii) ఇతరత్రా అభిలంబ పరివర్తనలో వక్రత, విమోటనములు నిశ్చరములని చూపండి.

40. (a cos 2t, a sin 2t, 2a sin t) వక్రమునకు గీసిన సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$$(\sin t + \sin 2t \cos t)\, x - 2\cos^3 t\, y + 2z = 3a \sin t$$ అనియు

$$\tau = \frac{3}{a}(5 \sec t + 3 \cos t)^{-1}$$ అనియు చూపండి.

41. ఒక వక్రమునకు గీయబడిన (i) ప్రధాన అభిలంబరేఖపై, (ii) ఉపాభిలంబరేఖపై బిందువునుండి C దూరములో P ఉండిన దాని బిందుపథ వక్రము యొక్క వక్రత k_1 వరుసగ

(i) $$k_1^2\,[(1-ck)^2 + c^2\tau^2]^3 = [c\tau^2 - k(1-ck)]^2\,[c^2\tau^2 + (1-ck)^2] + c^2\,[\tau' - c(\tau' k - \tau k)]^2$$ చే

(ii) $$k_1^2\,(1 + c^2\tau^2)^3 = c^2\tau^4(1 + c^2\tau^2) + (k - c\tau + c^2 k\tau^2)^2$$ చే సూచించబడుతుందని చూపండి.

42. ఈ క్రింది వక్రములకు వక్రత, వివోటనములు కనుగొనండి.

i) $(a\cos\theta, a\sin\theta, a\tan\alpha\,\theta)$ జ. $\frac{\cos^2\alpha}{a}, \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}$

ii) $(a(3u-u^3), 3au^2, a(3u+u^3))$ జ. $k=\tau=\frac{1}{3a}(1+u^2)^{-2}$

iii) $(4a\cos^3 u, 4a\sin^3 u, 3c\cos 2u)$ జ. $\frac{a\operatorname{cosec} 2u}{6(a^2+c^2)}, \frac{c\operatorname{cosec} 2u}{6(a^2+c^2)}$

iv) $(3t, 3t^2, 3t^3)$ జ. $k=|\tau|=\frac{2}{3}(1+2t^2)^2$

v) $(a\cos 2t, a\sin 2t, 2a\sin t)$

జ. $\frac{(5+3\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}{2a(1+\cos^2 t)^{3/2}}, \frac{3}{a(5\sec t+3\cos t)}$

vi) $(a\sqrt{b}\,t^3, a(1+3t^2), a\sqrt{b}\,r)$ జ. ఒక్కొక్కటి $a^{-1}(1+3t^2)^{-2}$

vii) $(2abt, a^2\log t, b^2t^2)$ జ. ఒక్కొక్కటి $2abt(a^2+2b^2+t^2)^{-2}$

viii) $\left(u, \frac{u+1}{u}, \frac{u^2+1}{u}\right)$ జ. $\frac{3u^6}{2(1+u^2+u^4)^3}, 0$

ix) $(e^u, e^{-u}, \sqrt{2}\,u)$ జ. $k=|\tau|=4\sqrt{2}\cosh^2 u$

x) $(a(u-\sin u), a(1-\cos u), bu)$ జ. వక్రత $\frac{a(b^2+4a^2\sin^4 u)^{1/2}}{\left(b+4a^2\sin^2\frac{u}{2}\right)^{3/2}}$

xi) $(a\cos\theta, a\sin\theta, a\cos 2\theta)$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ వద్ద

జ. $\frac{\sqrt{3}}{a(1+4a^2)^{3/2}}, \frac{6}{5a}$

xii) $(a\tan\theta, a\cot\theta, a\sqrt{2}\log\tan\theta)$ జ. $k=T=\frac{\sin^2\theta}{2\sqrt{2}}a$

xiii) $(2a\sin^{-1}t+t\sqrt{1+t^2}, 2at^2, 4at)$ జ. $(8a)^{-1}(1-t^2)^{-1/2}$

xiv) $\left(2a\cos^2\frac{u}{2}, 2a\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}, 2a\sin\frac{u}{2}\right)$

జ. $\dfrac{\left(5+3\cos^2\frac{u}{2}\right)^{1/2}}{2a\left(1+\cos^2\frac{u}{2}\right)^{3/2}}, \dfrac{3\cos\frac{u}{2}}{a\left(5+3\cos^2\frac{u}{2}\right)}$

xv) (a cos u sech u, a sin u sech u, au − a tan hu)

జ. $\frac{2}{a}$ sech u, స్థిరరాశి

xvi) $(a\,\theta\cos\theta, a\,\theta\sin\theta, ab\,\theta)$

జ. $\dfrac{[4(1+b^2+\theta^2)+\theta^2(b^2+\theta^2)]^{1/2}}{a(1+b^2+\theta^2)^{3/2}}, \dfrac{b(\theta^2+6)}{a[4(1+b^2+\theta^2)+\theta^2(b^2+\theta^2)]}$

xvii) (a cosh t, a sinh t, bt)

జ. $\dfrac{a^2(a^2+b^2\cosh 2t)}{(a^2\cosh 2t+b^2)^3}, \dfrac{b}{a^2+b^2\cosh 2t}$

xviii) (x, f(x), g(x))

జ. $\dfrac{(f'g''-g'f'')^2+f''^2+2g''^2}{\left(1+f'^2+g'^2\right)^3}, \dfrac{f''g'''-g''f'''}{(f'g''-g'f'')^2+f''^2+g''^2}$

xix) $x^2+y^2=a^2, x^2-y^2=az$ జ. $\dfrac{a(5a^2+12z^2)^{1/2}}{(5a^2-48^2)^{3/2}}, \dfrac{6(a^2-z^2)^{1/2}}{(5a^2+12z^2)}$

xx) $x^2+y^2=z^2, z=a\tan^{-1}\frac{y}{x}$ జ. $\dfrac{(8+5\theta^2+\theta^4)^{1/2}}{a(2+\theta^2)^{3/2}}, \dfrac{6+\theta^2}{a(8+5\theta^2+\theta^4)}$

43. $x^2+y^2+z^2=3, xy+yz+zx=1$ ల ఛేదన వక్రము $2\sqrt{3}$ వ్యాసార్ధముగా కల వృత్తము అవుతుంది.

44. ఒక వక్రము వర్తులకుండలిని అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్తనియమము $|t^{1}\ t^{11}\ t^{111}|$ అని చూపండి.

45. గోళము కుండలిని యొక్క విక్షేపము అక్షమునకు లంబముగా కల సమతలముపై Epicycloid యొక్క చాపమని చూపండి.

46. వర్తులకుండలినికి గీసిన సంస్పర్శక తలములు అవక్రములై లేని స్థిరబిందువు ద్వారాపోయిన వాటి స్పర్శబిందువులు ఒక సమతలములో ఉంటాయని, ఈ ధర్మము $xdy-ydx=cdz$ కు సంతృప్తిపరచు అన్ని వక్రములకు వర్తిస్తుందని చూపండి.

సంస్పర్శకవృత్తము:

47. ఒక వక్రమునకు గీసిన ప్రధాన అభిలంబరేఖ వక్రతా కేంద్రముల బిందుపథము వక్రత స్థిరమగు బిందువుల వద్ద లంబముగ ఉంటుందని చూపండి.

48 ఒక వక్రము యొక్క సంస్పర్శక వృత్తమునకు వక్రముతో కనీసము 2 - వ పరిమా స్పర్శవ్యవస్థితమవుతుందని చూపండి.

సంస్పర్శక గోళము:

49 k, τ, R లు వక్రత, విమోటనము, వక్రతా గోళవ్యాసార్ధము కల వక్రముపై బిందు x, y: అయిన

$$x'''^2+y'''^2+z'''^2=\frac{1}{\rho^2\sigma^2}+\frac{1+\rho'^2}{\pi^4}=\frac{R^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\rho^4}$$

అవుతుందని చూపండి.

50 ఒక వక్రము యొక్క వక్రతా కేంద్ర బిందుపథముపై కల బిందువునకు గీసి అభిలంబతలము వక్రముపై ఆ బిందువునకు అనురూపబిందువు వద్ద గీసిన గోళీ వక్రతా వ్యాసార్ధమునకు ద్విఖండన చేస్తుందని చూపండి.

51. ఒక వక్రమునకు గీసిన సంస్పర్శకతలము స్థిరగోళమును స్పర్శించిన చాపకలనీయతలము గోళకేంద్రము ద్వార పోతుందని చూపండి.

52 a $\sin^2\theta$, a $\sin\theta\cos\theta$, a $\cos\theta$) వక్రము గోళముపై ఉంటుందని చూపండి.

53 సంస్పర్శక గోళకేంద్ర బిందు పథమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ సంస్పర్శక వృత్తకేంద్రము ద్వార పోతుందని చూపండి.

54 ఒక వక్రమునకు వక్రతా గోళ వ్యాసార్ధము స్థిరరాశి అయిన ఆ వక్రము (i) గోళముపై ఉంటుంది లేక (ii) స్థిరవక్రతను కలిగి ఉంటుంది అని చూపండి.

55 ఒక వక్రము యొక్క అభిలంబతలములు స్థిరబిందువు ద్వారా పోయిన ఆ వక్రము గోళముపై ఉంటుంది.

56 $r = at^3 + 3bt^2 + 3ct$ అను వక్రమునకు సంస్పర్శక గోళ సమీకరణము వ్రాయండి.

57. ((a sin u + b cos u), (a cos u + b sin u, c sin 2u). అను వక్రమునకు సంస్పర్శకతల సమీకరణము వక్రతా గోళ వ్యాసార్థము కనుగొనండి.

58. s_1 ఒక వక్రము యొక్క వక్రతా గోళ కేంద్రముల బిందుపథము యొక్క చాపమును సూచించిన $\frac{ds_1}{ds} = (\rho 1^2 + \rho^2 \tau^2)^{1/2}$ అని చూపండి.

59. వక్రతా గోళ కేంద్ర బిందు పథము ఇవ్వబడిన వక్రము సమీకరణము వ్రాయండి.

గోళీయ సూచిక – t, n, b ల విస్తరణము :

60. ఒక వక్రము యొక్క (i) **t** గోళీయ సూచిక బిందువుగ మారిన, (ii) **b** గోళీయ సూచిక బిందువగ మారిన వక్రమును కనుగొనండి.

61. ఒక వక్రము యొక్క గోళీయ సూచిక వృత్తము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఆ వక్రము కుండలిని అగుట అనిచూపండి.

62. ఒక వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ, ఉపాభిలంబరేఖల గోళీయ సూచికల అనురూప బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు సమాంతరము అని చూపండి.

63. ఒక క్రమ వక్రము దాని సంస్పర్శక తలమును ప్రతిబిందువు వద్ద ఖండించిన O వద్ద అభిలంబ తలముపై వక్రము యొక్క విక్షేపము పార్శ్వవక్రము (cusp) అని చూపి సంస్పర్శకతలము, చాపకలనీయ తలములపై విక్షేపములు కనుగొనండి.

64. $O(s^4) \to 0$ అయిన ఒక వక్రముపై జ్యా, చాపముల భేదము $\frac{k^2 s^3}{2u}$ అని చూపండి.

65. ఒక బిందువునుండి చాపములు (s) వక్రము వెంబడి, వక్రతా వృత్తము వెంబడి గుర్తించబడినవి. $O(s^4) \to 0$ అయిన ఈ బిందువుల మధ్యదూరము $\frac{s^3 k^2 \tau}{6}$ అనిచూపండి.

66. ఒక వక్రముపై O, P సమీపబిందువులు, OP = s అయిన

(i) O, P ల వద్ద గీయబడిన సంస్పర్శక గోళములు $\frac{SR}{R\sigma}\frac{dR}{d\rho}$ కోణము చేస్తాయని,

(ii) O, P ల వద్ద గీయబడిన స్పర్శరేఖల మధ్య అత్యల్పదూరము $\frac{\tau s}{2}$ అని చూపండి.

కేంద్రజము – ప్రతికేంద్రజము :

67. ఒక వక్రముపై ఒక బిందువు వద్ద కుంభాకార భాగము వెంబడి వదులబడిన స్థితి స్థాపకత లేని దారమును పొడవు స్థిరమగునట్లు వదులుచు పోయిన వక్రము యొక్క ప్రతికేంద్రజము వస్తుందని చూపండి.

68. ఒక twisted వక్రము యొక్క ప్రతికేంద్రజము సమతలీయ వక్రము అయిన దత్త వక్రము కుండలిని అని చూపండి.

69. $(a \cos \theta, a \sin \theta, a \theta \tan \alpha)$ యొక్క ప్రతికేంద్రజము సమతల వక్రము అనియు కేంద్రజము

$x = -a \tan \alpha [\tan \alpha \cos \theta + \sec \alpha \sin \theta \tan \psi]$,

$y = -a \tan \alpha [\tan \alpha \cos \theta - \sec \alpha \cos \theta \tan \psi]$,

$z = a [\theta \tan \alpha - \sec \alpha \tan \psi]$; $\psi = (\theta \sin \alpha + c)$ అని చూపండి.

70. (u, u^2, u^3) అను వక్రమునకు కేంద్రజము, ప్రతికేంద్రజము కనుగొనండి.

71. ఒక వృత్తాకార కుండలిని యొక్క వక్రతా కేంద్రముల బిందు పథ వక్రము దాని సహాక్ష కుండలిని అనియు దీని వక్రతా కేంద్రముల బిందు పథము దత్తకుండలిని అవుతుందని చూపండి.

72. ఒక సమతల వక్రమునకు ఆ సమతలములో ఒకే ఒక కేంద్రజము (వక్రతా కేంద్రముల బిందు పథము) వ్యవస్థితమని చూపి ఇతర కేంద్రజములుపై వక్రము ఆధారముగ గీయబడిన లంబస్థూపముపై గీయబడిన కుండలినులు అవుతాయని చూపండి.

73. ఒక వక్రము యొక్క రెండు కేంద్రజములు ψ_1, ψ_2 ల మధ్య స్థిరకోణముంటుందని చూపండి.

బెర్ట్రాండ్ వక్రము :

74. ఒక వక్రము యొక్క వక్రత, వివోటనములు రేఖీయ సమాసముగ వ్యక్త పరచబడిన ఆ వక్రము బెర్ట్రాండ్ వక్రమని చూపండి.

75. $(1 - ak)\sin\alpha + a\tau$ ను అవకలనము చేసి (i) స్థిరవక్రత కలిగిన వక్రములకు వక్రతా కేంద్రముల బిందుపథము బెర్ట్రాండ్ వక్రము అవుతుందనియు (ii) స్థిరవిమోటనము కల వక్రము దాని బెర్ట్రాండ్ వక్రముతో ఏకీభవిస్తుందని చూపండి.

76. ఒక సమతల వక్రము యొక్క బెర్ట్రాండ్ వక్రములు అనుతములనియు అవి దత్తవక్రమునకు సమాంతరము అని చూపండి.

77. వృత్తాకార కుండలిని బెర్ట్రాండ్ వక్రములు సహాక్ష స్థూపములపై కుండలినులు అవుతాయి.

78. $u = u(s)$ యూనిట్ గోళముపై వక్రము అయిన దాని బెర్ట్రాండ్ వక్రము $\mathbf{r} = a\int u\,ds - a\cot\alpha \int (u \wedge du)$ అవుతుందని చూపి వీటి జ్యామితీయ వివరణ ఇవ్వండి (స్థిరవక్రత, స్థిరవిమోటన వక్రములు అవుతాయి).

79. బెర్ట్రాండ్ వక్రనిర్వచనములో ప్రధాన అభిలంబరేఖల బదులు (i) 'స్పర్శరేఖలు', (ii) 'ఉపాభిలంబరేఖలు' తీసికొనగా ఏర్పడు మార్పులను చర్చించండి.

స్వాభావిక సమీకరణములు:

80. $\rho = \sigma = s$ చే సూచించబడు వక్రము $x = \dfrac{s(\cos\phi + \sqrt{2}\sin\phi)}{3\sqrt{2}}$

$y = \dfrac{s(\sin\phi - \sqrt{2}\cos\phi)}{3\sqrt{2}}$; $\phi = \sqrt{2}\log 5$ అవుతుంది.

81. $\rho = as, \sigma = bs$ చే సూచించబడు వక్రసమీకరణము వ్రాయండి.

82. $\rho = a\sin\dfrac{s}{2a}, \sigma = 2a$ లచే సూచించబడు వక్రము 'a' వ్యాసార్ధము కల గోళముపై ఉంటుందని, దీని కేంద్రజము $\rho = \dfrac{a}{2}\sin\dfrac{s}{a}, \sigma = \dfrac{a}{3}$ అవుతుందని చూపండి.

3.

ఆవరణికలు - ఉత్పన్న తలాలు రేఖాజన్య తలాలు

3.1 ఉపరితలాలు :

ఏక పరామితీయ సదిశ సమీకరణములు వక్రములను, రెండు స్వతంత్ర పరిమితులు కలిగిన సదిశ సమీకరణములు ఉపరితలములను సూచిస్తాయని తెలుసుకున్నాము.

r (u, v) = (X, Y, Z) లేక x = X (u, v), y = Y (u, v), z = Z (u, v) ఒక ఉపరితలమును సూచిస్తుంది. అయితే ఉపరితలము యొక్క పరామితీయ ప్రాతినిధ్యము ఏకైకము కాదు. ఒక్కొక్క రకమైన పరామితీయ సమీకరణము ఉపరితలము యొక్క ఒక్కొక్క ధర్మమును మాత్రమే వివరిస్తుంది. దీనికి కారణము ఉపరితలము ఏకమొత్తములో విలక్షణ బిందువులు లేకుండా పరామితీకరింపబడక పోవుటయే.

ఉదా : $z = x^2 - y^2$ అను ఉపరితలమును

(i) $x = u, y = v, z = u^2 - v^2$;

(ii) $x = u + v, y = u - v, z = 4uv$ లేక

(iii) $x = u \cosh v, y = u \sinh y, \ z = u^2$

వంటి విభిన్న పరామితులతో సూచించవచ్చును. అయితే కార్టీజియన్ నిరూపకములలో ఎక్కువ వివరముగ ఉపరితలమును తెలియచేస్తుంది, ($z \in \mathbb{R}$) కాని ($u \cosh v, u \sinh v, u^2$) రూపములో u వాస్తవము (అంటే $z \in \mathbb{R}^+$) అను ఉపరితలము యొక్క ఒక భాగమును మాత్రమే సూచిస్తుంది.

సాధారణముగ ఉపరితలముల పరిశీలనలో X(u, v), Y(u, v), Z(u, v) ప్రమేయములు ద్విపరిమాణ సంధానిత (Connected) సమితి T పై (uv సమతలములో) అవిచ్ఛిన్నము

భావింపబడుతాయి. బిందువు (u, v) T పై చలించినప్పుడు దాని అనురూప బిందువు (x, y, z) ఉపరితలము యొక్క ఒక భాగమును మాత్రమే xyz అంతరాళములో వ్యక్తపరుస్తుంది. r ప్రతి సర్జనమునకు T యొక్క బింబము r(T) పరామితీయ ఉపరితలము అనియు r, T పై అన్వైక ప్రమేయము అయితే r(T) ని సాధారణ పరామితీయ ఉపరితలము అని అంటారు. $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ లు అవిచ్ఛిన్నము మరియు $\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ అయిన r (u, v), r యొక్క క్రమ బిందువు అవుతుంది. $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ లు అవిచ్ఛిన్నము కాకుండిన లేక $\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = 0$ అయినట్టి బిందువులను r యొక్క *విలక్షణ బిందువులు* అంటాము. ఒక ఉపరితలము యొక్క అన్ని బిందువులు క్రమబిందువులయిన ఆ ఉపరితలము మృదు (నున్నైన) ఉపరితలము అవుతుంది.

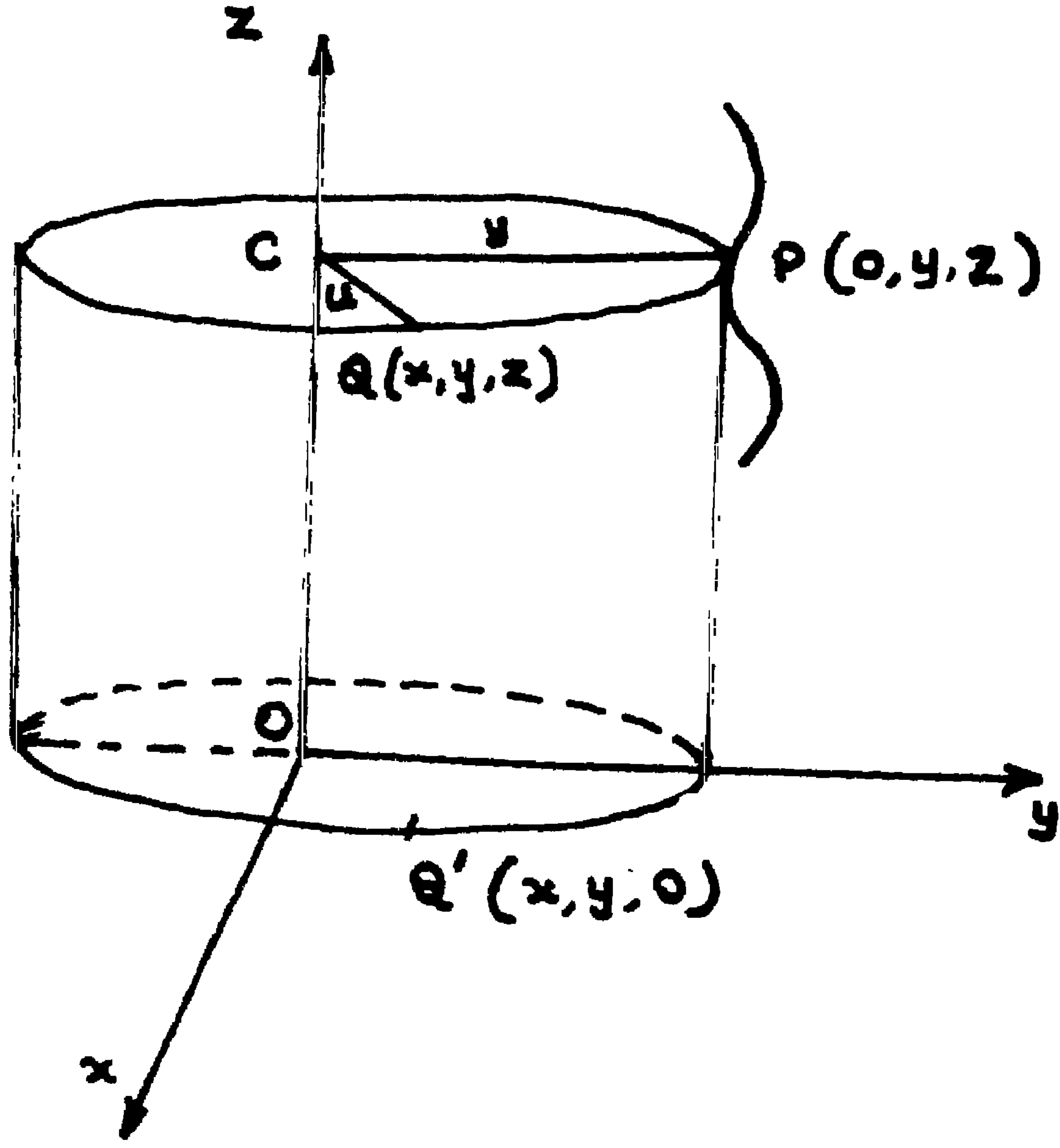
3.2 కొన్ని ఉపరితలములకు పరామితీయ వివరణము :

(i) **గోళము :** $r = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$

(ii) **శంకువు :** $r = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$

(iii) **భ్రమణోపరితలము :** ఒక సమతల వక్రము దాని తలములోని ఒక అక్షము దృష్ట్యా భ్రమణము చేయగ ఏర్పడు ఉపరితలమును భ్రమణోపరితలము అంటాము. z అక్షము భ్రమణాక్షము, $x = 0$ సమతలములో $z = f(y)$ సమతల వక్రము (దీనిని ఉపరితలము యొక్క ప్రొఫైల్ అంటాము) అయిన P(o, y,z) బిందువు చలించుచు బిందువులు Q(x, y,z) లను ఏర్పరస్తుంది. P, Q ల z - నిరూపకములు సమానము, మరియు u (z అక్షము నుండి ఈ బిందువులకు గల దూరము) y అవుతుంది. కావున $z = f(u)$ అవుతుంది. ($CQ = OQ^1$) x - అక్షముతో ϕ కోణము చేసిన $x = u \cos \phi$, $y = u \sin \phi$ అవుతాయి. కావున ఉపరితలమును జనింపచేయు Q నిరూపకములు (అనగా ఉపరితల సమీకరణము)

$x = u \cos \phi$, $y = u \sin \phi$, $z = f(u)$ లేక z(u) అవుతుంది.



పటం 3.1

పరామితీయ వక్రములు : u = స్థిరరాశులచే సూచింపబడు వక్రములను భ్రమణాక్షమునకు లంబముగా ఉండు సమతలములు, ఉపరితలముల ఛేదనవక్రములు లేక సమాంతరములు అనియు Q = స్థిరరాశులచే సూచింపబడు వక్రములను అక్షము ద్వారా పోవు సమతలములు, ఉపరితలముల ఛేదన వక్రములు అంటాము.

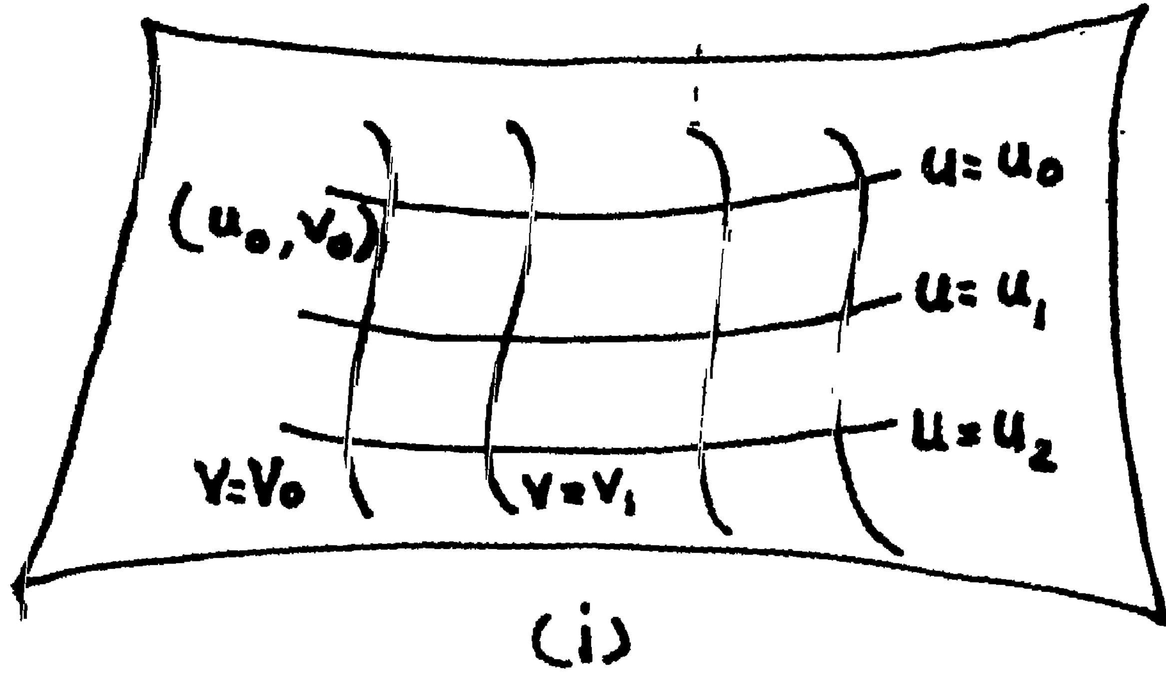
సాధారణ రూపము : జనక వక్రము zx సమతలములో ఉండిన దాని సమీకరణము $x = g(u)$, $y = 0$, $z = f(u)$ రూపములో ఉంటుంది. z - అక్షముతో ఏర్పడు భ్రమణ కోణము v అయిన ఉపరితల సమీకరణము $r = [g(u) \cos v, g(u) \sin v, f(u)]$ అవుతుంది. ఇచట v విలువలు $[0, 2\pi]$ లో ఉంటాయి.

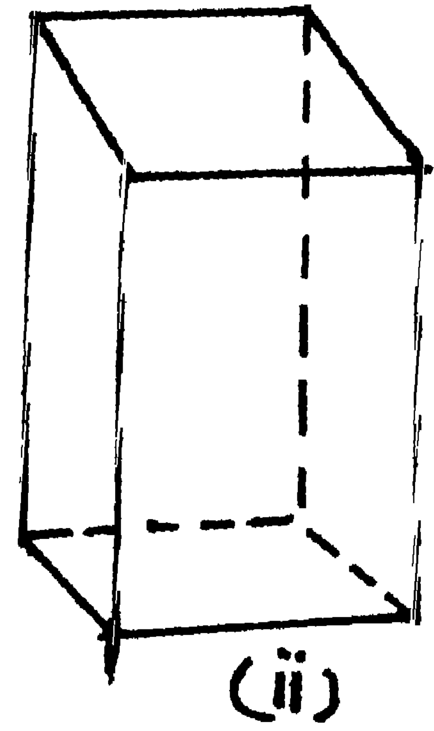
సూచన : లంబ helicoid సమీకరణము, పరామితుల రూపములో

$r = (u \cos v, u \sin v, av)$ మరియు సాధారణ helicoid సమీకరణము

$r = [g(u)\cos v, g(u)\sin v, f(u) + av]$ అవుతుంది.

ఉదా 1 : $r = r(u, v)$ ఒక ఉపరితలమును $\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}$ దాని అభి లంబరేఖను సూచిస్తాయని చూపండి.





పటం 3.2

$u = u_0$ అయిన $r = r(u_0, v)$ అను ఏక పరామితీయ సమీకరణము వక్రమును సూచిస్తుంది. అట్లే $u = u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots$ లకు దత్త సమీకరణము అంతరాళములోని నిర్దిష్ట వక్రములను సూచిస్తాయి. కావున $r = r(u, v)$ అటువంటి వక్రములచే జనించు ఉపరితలమును సూచిస్తుంది. ఇదే విధముగా $v =$ స్థిరరాశి కూడా ఇంకొక వక్ర సరళిని సూచిస్తుంది. u - వక్రములు, v - వక్రముల ఖండన బిందువులు వక్రరేఖా నిరూపకముల (currilineer coordinates) సూచిస్తాయి. పై పటము (i) లో (u_0, v_0) అటువంటి ఒక బిందువు అవుతుంది.

ఈ ఉపరితలముపై $P(u_0, v_0)$ ను తీసికొనిన $\frac{\partial r}{\partial u} = r_1$ అను సదిశ $v = v_0$ వక్రమునకు, $\frac{\partial r}{\partial v} = r_2$ అను సదిశ $u = u_0$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖలను సూచిస్తాయి. కావున ఈ సదిశలు ఉపరితలమునకు స్పర్శరేఖలవుతాయి.

మరియు $r_1 \wedge r_2 \; r_2(r_1 \wedge r_2) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)$ అవుతుంది.

ఉపరితలమునకు P వద్ద అభిలంబరేఖను సూచిస్తుంది. దీనిని r (u, v) యొక్క ప్రాథమి సదిశా లబ్దము అంటాము.

ఉదా 2 : $r = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ అన ఉపరితలమునక సమాంతరములు, అక్షము ద్వారాపోవు సమతలములతో ఏర్పడు ఛేదన వక్రములు కనుగొనండి.

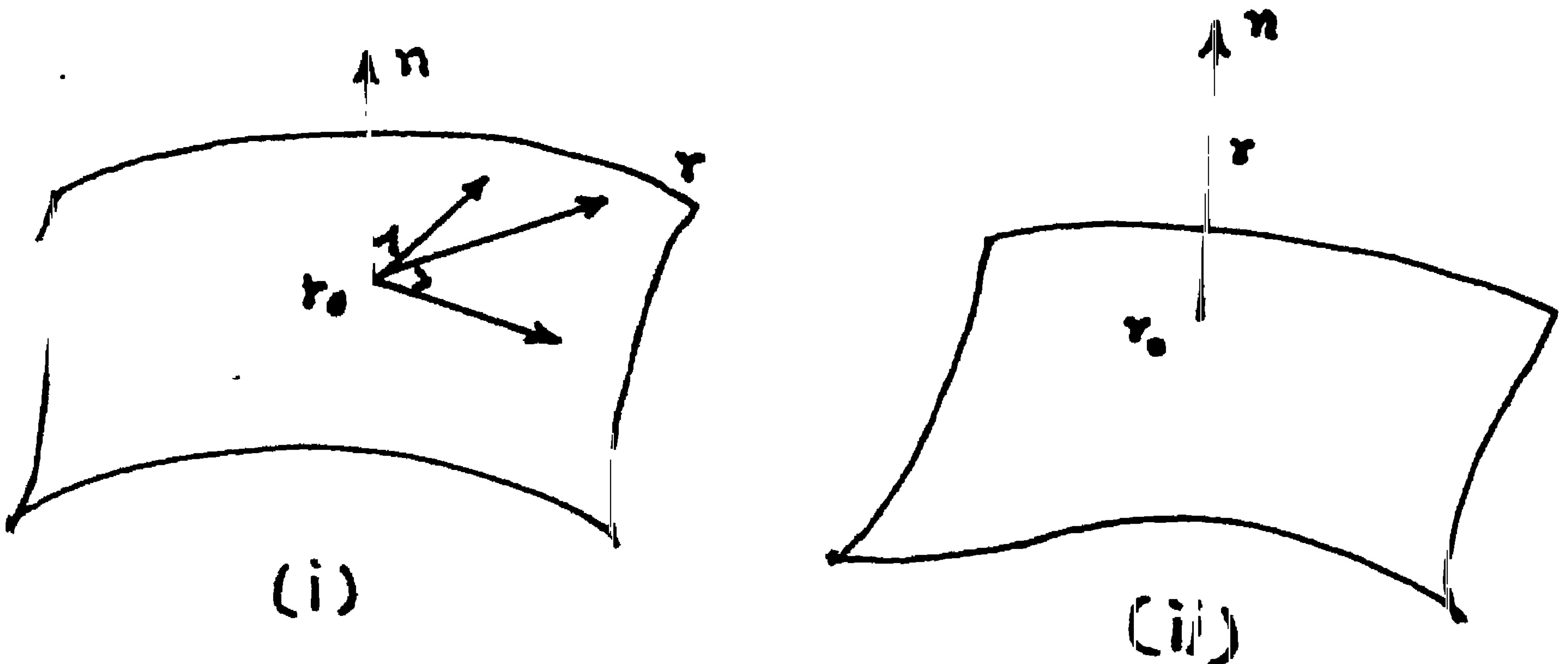
u = స్థిరరాశి $\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan u_0$ (లేక $\tan \alpha$) అవుతుంది

v = స్థిరరాశి $\Rightarrow \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan v_0$ (లేక $\tan \beta$) అవుతుంది లేక

$x^2 + y^2 = az^2$.

3.3 స్పర్శతలము – అభిలంబరేఖ :

$f(x, y, z) = 0$ ఉపరితలమునకు గీసిన స్పర్శతలముపై చలన బిందువు r, స్పర్శ బిందువు r_0 అయిన ∇f ఉపరితలమునకు (తద్వారా స్పర్శతలమునకు) లంబముగ ఉంటుంది.



పటము 3.3

కావున స్పర్శతల సమీకరణము $(r - r_0) \cdot \nabla f = 0$ మరియు అభిలంబ సమీకరణము

$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge \nabla f = 0$ అవుతాయి. కార్టీజియన్ నిరూపకములలో

ఇవి $(X - x) f_x + (Y - y) f_y + (Z - z) f_z = 0$;

$$\frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y} = \frac{Z - z}{f_z}$$ గ మారుతాయి.

సూచన :

1. $r = r(u, v)$ అను ఉపరితలమునకు అభిలంబరేఖ $r_1 \wedge r_2$ చే సూచింపబడిన స్పర్శతల సమీకరణము $(R - r) \cdot (r_1 \wedge r_2) = [(R - r), r_1, r_2] = 0$ మరియు అభిలంబరేఖ సమీకరణము $R - r = \lambda (r_1 \wedge r_2)$ అవుతాయి.

2. ఉపరితలమునకు యూనిట్ అభిలంబరేఖ $\frac{r_1 \wedge r_2}{|r_1 \wedge r_2|}$ అవుతుంది.

ఉదా 3 : $z = xy$ తలమునకు (2, 3, 6) వద్ద స్పర్శతల సమీకరణము, అభిలంబరేఖ సమీకరణము వ్రాయండి.

$$\mathbf{r} = (u, v, uv)$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, 0, v) ; r_2 = \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 1, u)$$

$$\Rightarrow r_1 \wedge r_2 = (-v, -u, 1)$$

$\Rightarrow$ స్పర్శతల సమీకరణము $[R - r, r_1, r_2] = 0$;

$\mathbf{u = 2, v = 3}$ వద్ద

$3(x - 2) + z (y - 3) - (z - 6) = 0$ లేక $3x + 2y - z = 6$

మరియు అభిలంబ రేఖ

$$\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z - 6}{1}$$ లేక $(2 - 3\lambda, 3 - 2\lambda, 6 + \lambda)$ అవుతాయి.

ఉదా 4 : $xyz = a^2$ అను ఉపరితలము యొక్క స్పర్శతలము నిరూపకాక్షములతో ఏర్పరచు చతుర్ముఖి ఘన పరిమాణము స్థిరమని చూపండి.

స్పర్శతల సమీకరణము $(x-x_0)f_x + (y-y_0)f_y + (z-z_0)f_z = 0$ (P_0 వద్ద)

$\Rightarrow (x-x_1)y_1z_1 + (y-y_1)z_1x_1 + (z-z_1)x_1y_1 = 0$ లేక

$\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} + \dfrac{z}{z_1} = 3$ (P_1 వద్ద)

$\Rightarrow$ అంతర్ఖండములు $3x_1, 3y_1, 3z_1$; చతుర్ముఖి OABC ఘన పరిమాణము

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3x_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3y_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3z_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{27\,x_1y_1z_1}{6} = \frac{9}{2}\,a^2 = \text{స్థిరరాశి.}$$

ఉదా 5 : $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ అను ఉపరితలమునకు గీసిన స్పర్శతలము నిరూపకాక్షములతో చేయు అంతర్ఖండముల వర్గముల మొత్తము a^2 అవుతుంది. స్పర్శతల సమీకరణము $(x-x_1)x_1^{-1/3} + (y-y_1)y_1^{-1/3} + (z-z_1)z_1^{-1/3} = 0$

$\Rightarrow$ నిరూపకాక్షములపై అంతర్ఖండములు $x_1^{1/3}a^{2/3}, y_1^{1/3}a^{2/3}, z_1^{1/3}a^{2/3}$ అవుతాయి.

కావున వీటి వర్గముల మొత్తము $\left(x_1^{2/3} + y_1^{2/3} + z_1^{2/3}\right)a^{4/3} = a^2$ అవుతుంది.

ఉదా 6 : $a(x^2 + y^2) + xyz = 0$ అను ఉపరితలమునకు గీసిన స్పర్శతలము తిరిగి ఉపరితలమును శంకువములో స్పర్శించునని (xy - తలములో ఇది లంబ అతిపరావలయము అవుతుంది) చూపండి. (సూచన : x^2 గుణకము + y^2 గుణకము = 0)

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ వద్ద $a(x^2 + y^2) + xyz = 0$ —— (1)

దీనికి స్పర్శతల సమీకరణము

$(x-x_1)(2ax_1 + y_1z_1) + (y-y_1)(2ay_1 + z_1x_1) + (z-z_1)x_1y_1 = 0$ అవుతుంది. —— (2)

(1), (2) ల ఖండన వక్రము xy - తలములో కనుగొనుటకు వీటి నుండి z ను తొలగించవలెను.

$\Rightarrow (xy_1 - yx_1)\,[\,xy\left(x_1^2 - y_1^2\right) = x_1y_1(xx_1 - yy_1)\,] = 0,$

$\frac{x}{x_1} \neq \frac{y}{y_1}$ కావున xy - తలములో ఈ ఖండన వక్రము లంబ అతిపరావలయము.

ఉదా 7 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ అను దీర్ఘ వృత్తమునకు P వద్ద గీయబడిన అభిలంబరేఖ నిరూపక తలములను G_1, G_2, G_3 లలో ఖండించిన $PG_1 : PG_2 : PG_3$ స్థిరనిష్పత్తి అవుతుంది.

$P(x_1, y_1, z_1)$ వద్ద ఉపరితలమునకు గీసిన అభిలంబరేఖా సమీకరణములు

$$\frac{x - x_1}{\frac{2x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{2y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{2z_1}{c^2}}$$ అవుతాయి.

yz తలముతో ఖండన బిందువు

$$G_1\left(0, \frac{(b^2 - a^2)\,y_1}{b^2}, \frac{(c^2 - a^2)\,z_1}{c^2}\right),$$

zx తలముతో

$$G_2\left(\frac{(a^2 - b^2)\,x_1}{a^2}, 0, \frac{(c^2 - b^2)\,z_1}{c^2}\right)$$ మరియు xy తలముతో ఖండన బిందువు

$$G_3\left(\frac{(a^2 - c^2)\,x_1}{a^2}, \frac{(b^2 - c^2)\,y_1}{b^2}, 0\right)$$ అవుతాయి.

$$\Rightarrow PG_1^2 = a^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right), PG_2^2 = b^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right)$$ మరియు

$$PG_3^2 = c^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right).$$

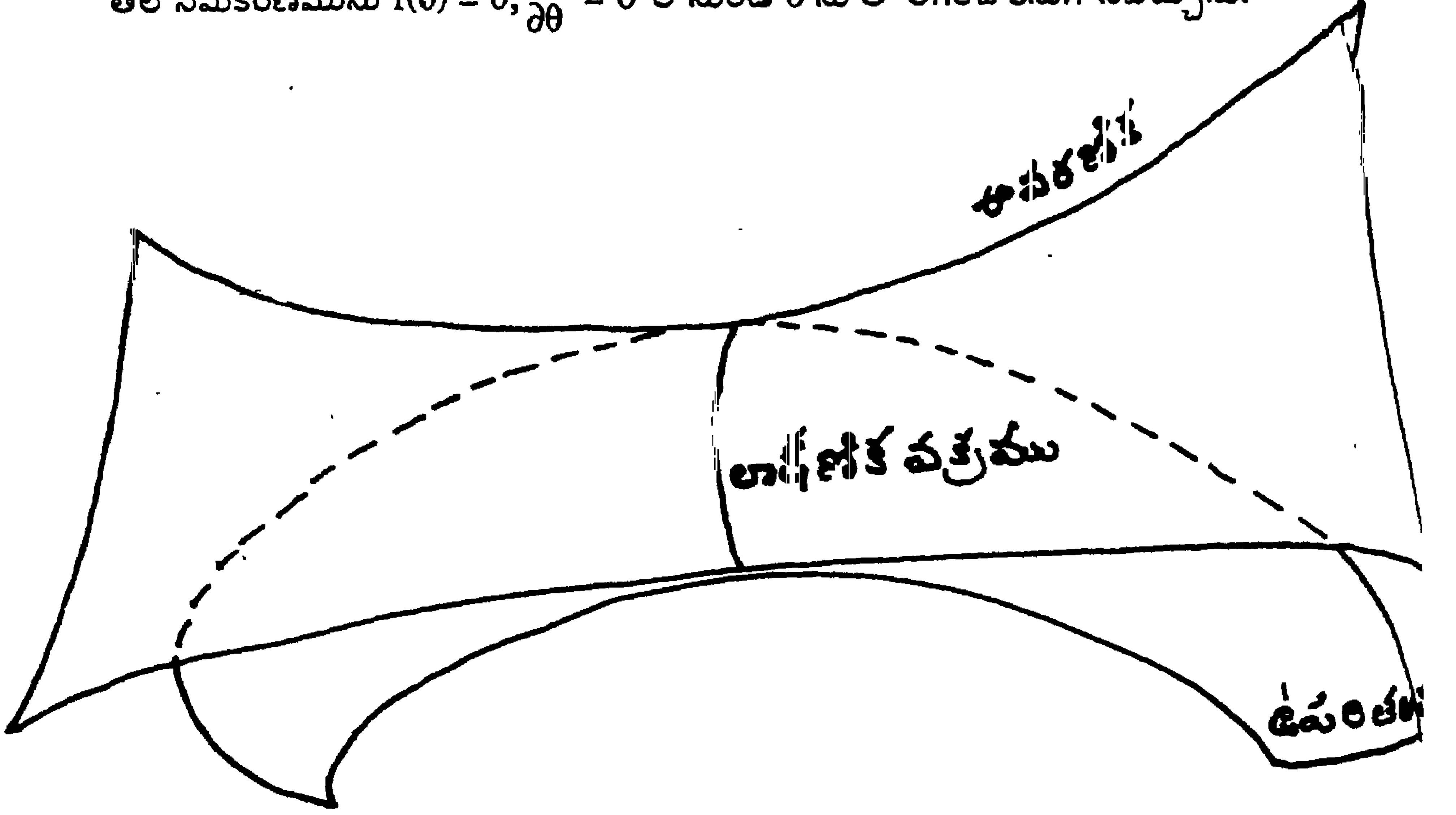
$\Rightarrow PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$ అవుతుంది.

3.4 ఏక పరామితీయ ఉపరితలముల వ్యవస్థకు ఆవరణిక, లాక్షణిక వక్రములు :

$f(x, y, z, \theta) = 0$ లేక $f(\theta) = 0$ ఒక ఉపరితల సరళిని సూచిస్తుంది, θ ఒక పరామితి దీని సామీప్య ఉపరితలము $f(\theta + \delta\theta) = 0$ అయిన ఈ రెండింటి ఖండన వక్రము

$f(\theta) = 0 = f(\theta + \delta\theta)$ చే కాని $f(\theta) = 0, f(\theta + \delta\theta) - f(\theta) = 0$ చే కాని లేక $\delta\theta' \to \theta$

అయిన $f(\theta) = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ చే కాని సూచింపబడుతుంది. ఈ వక్రమును θ యొక్క పరామితీయ విలువలకు $f(\theta) = 0$ యొక్క లాక్షణిక వక్రము అంటాము. ఇటువంటి లాక్షణిక వక్రములన్నింటి సముదాయము $f(\theta) = 0$ యొక్క ఆవరణికా తలము అవుతుంది. ఆవరణికా తల సమీకరణమును $f(\theta) = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ ల నుండి θ ను తొలగించి కనుగొనవచ్చును.



పటము 3.4

ధర్మము : ఆవరణిక ఇవ్వబడిన ఉపరితలముల సరళి యొక్క ఒక్కొక్క ఉపరితలమును అనురూప లాక్షణిక వక్రము యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద స్పర్శిస్తుంది.

(θ) కు అనురూప లాక్షణిక వక్రము ఆ ఉపరితలములోను దాని ఆవరణికలోను ఉంటుంది. లాక్షణిక వక్రము $f = 0 = f_0$ తోను ఆవరణిక $f = 0 = f_\theta$ లలో θ లేని విధముగను వ్యక్తపరచబడతాయి.

ఉపరితలమునకు అభిలంబరేఖను $\nabla f = \mathbf{i} f_x + \mathbf{j} f_y + \mathbf{k} f_z$ చేతను ఆవరణిక అభిలంబరేఖ ∇E తోను (θ ను x, y, z ల ప్రమేయముగ భావించి) వ్రాస్తాము.

$$\Rightarrow \nabla E = \nabla f[x, y, z, \theta(x, y, z)] = \left[\left(fx + f_\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right] i = \nabla f + f_\theta \nabla\theta$$

ఆవరణికకు $f_\theta = 0$ అవుతుంది. కావున $\nabla E = \nabla f$ అవుతుంది. అనగ అన్ని ఉమ్మడి బిందువుల వద్ద ఉపరితలమునకు, ఆవరణికకు ఉమ్మడి లంబరేఖ ఉంటుంది.

$\Rightarrow$ అన్ని ఉమ్మడి బిందువుల వద్ద వీటికి ఒకే స్పర్శ తలము ఉంటుంది.

$\Rightarrow$ అవి లాక్షణిక వక్రము యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద స్పర్శిస్తాయి.

పైన వివరించిన లాక్షణిక వక్రములను ఈ క్రింది విధముగ కూడ నిర్వచిస్తాము.

నిర్వచనము : $f(r, \theta) = 0$ అను ఉపరితలముల సరళికి ఆవరణిక $r = r(\theta, \phi)$ అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము "ప్రతి $\theta = \alpha$కు వక్రము $r = r(\alpha, \theta)$ ఉపరితలము $f(r, \alpha) = 0$లో ఉంటుంది. మరియు ఆ వక్రము వెంబడి $f(r, \alpha) = 0$ అను ఉపరితలము, $r = r(\theta, \psi)$ అను ఉపరితలము స్పర్శతలము కలిగి ఉంటాయి." $r = r(\alpha, \phi)$ని $f(r, \theta) = 0$ యొక్క లాక్షణిక వక్రము అంటాము.

ఉదా 8 : $3xt^2 - 3yt + z - t^3 = 0$ అను సమతలమునకు ఆవరణిక కనుగొనండి.

మొదటి పద్ధతి : $f(t) = 3xt^2 - 3yt + z - t^3 = 0 \Rightarrow f_t = 6xt - 3y - 3t^2 = 0$

$$\Rightarrow f(t) = (t - x)(-t^2 + 2tx - y) + 2(x^2 - y)t + (z - xy) = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{3}(t - x) f_t + 2(x^2 - y)\ t + (z - xy) = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 2(x^2 - y)t + (z - xy) = 0 \qquad (f_t = 0 \text{ కావున})$$

$$\Rightarrow t = \frac{-xy - z}{z(x^2 - y)};\ f_t = 0 \Rightarrow -(-t^2 + 2xt - y) = 0$$

$\Rightarrow (xy - z)^2 = -4(x^2 - y)(zx - y^2)$ ఆవరణిక అవుతుంది.

రెండవ పద్ధతి : $f(t) = 3xt^2 - 3yt + z - t^3 = 0,\ f_t = 6xt - 3y - 3t^2 = 0$ —— (1)

$$3f(t) - t\frac{\partial f}{\partial t} = 3xt^2 - 6yt + 3z = 0 \qquad \text{—— (2)}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{2(y^2 - zx)} = \frac{t}{xy - z} = \frac{1}{2(x^2 - y)}$$

$\Rightarrow (xy - z)^2 = 4\,(x^2 - y)\,(y^2 - zx)$ అవుతుంది.

ఉదా 9 : $\frac{x}{a + u} + \frac{y}{b + u} + \frac{z}{c + u} = 1$, (u = పరామితి) చే సూచించబడు సమతల ఆవరణికకనుగొనుము.

సమతల సమీకరణమును

$(a + u)(b + u)(c + u) - (b + u)(c + u)x - (c + u)(a + u)y - (a + u)(b + u)z=$

లేక

$$f(u) = u^3 + \lambda u^2 + \mu u + v = 0 \qquad \text{—— (1)}$$

గా వ్రాయవచ్చును.

$\lambda = a + b + c - (x + y + z)$, $\mu = ab + bc + ca - x(b + c) - y(c + a) - z(a + b)$;

$v = abc - (bcx + cay + abz)$ అవుతుంది. —— (2)

$$f_u = 3u^2 + 2\lambda u + \mu = 0 \qquad \text{—— (3)}$$

సమీకరణము (1) ని 3చే, (3) ను $-u$ చే గుణించి కూడిన

$\lambda u^2 + 2\mu u + 3v = 0$ వస్తుంది —— (4)

(3), (4) ల నుండి

$$\frac{u^2}{2(3\lambda v - \mu^2)} = \frac{u}{\lambda\mu - 9v} = \frac{1}{2(3\mu - y^2)}$$

లేక u ను తొలగించిన ఆవరణిక

$$(9v - \lambda\mu)^2 = 4\,(\mu^2 - 3\lambda v)\,(\lambda^2 - 3\mu)$$

అవుతుంది.

λ, μ, v లు సమీకరణము (2) చే సూచించబడినాయి.

3.5 ప్రతిగమన అంచు :

రెండు సామీప్య లాక్షనిక వక్రములు

$$f(x, y, z, \theta) = 0, \frac{\partial f(x, y, z, \theta)}{\partial \theta} = 0 \; ; \; f(x, y, z, \theta + \delta\theta) = 0, \frac{\partial f(x, y, z, \theta + \delta\theta)}{\partial \theta}$$

లు సాధారణముగ ఒక బిందువులో ఖండించుకుంటాయి. $\delta\theta \to 0$ అయినప్పుడు ఈ బిందువును లాక్షణిక బిందువు అంటాము. ఈ బిందువు $f = 0, f_\theta = 0, f_{\theta\theta} = 0$ లచే సూచింపబడుతుంది. ఇటువంటి లాక్షణిక బిందువుల సముదాయము ప్రతిగమన అంచు* అవుతుంది. ఇది $f = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$ ల నుండి θ ను తొలగించిన వస్తుంది. లేక

ఏక పరామితీయ ఉపరితలములకు గీసిన రెండు సామీప్య లాక్షణిక వక్రముల ఖండన బిందువుల అవధి రూపము ప్రతిగమన అంచు అవుతుంది.

3.5.1 ప్రతిలాక్షణిక వక్రము ప్రతిగమన అంచును స్పర్శిస్తుంది.

ప్రతిగమన అంచు $f(x, y, z, \theta) = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ లచే సూచింపబడుతుంది. $\theta = \theta(x, y, z)$ అను ప్రమేయము $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0$ చే నిర్ధారింపబడుతుంది.

లాక్షణిక వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ $f(\theta) = 0, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ ల అభి లంబరేఖలతో 90° చేస్తుంది. అనగా $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$;$\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = (f_{x\theta}, f_{y\theta}, f_{z\theta})$ లకు లంబము అవుతుంది.

ప్రతిగమన అంచు యొక్క అభి లంబరేఖ దిశ ∇g అయిన అది f లో θ ను x, y, z ల ప్రమేయముగ భావించిన వస్తుంది.

$$\theta \equiv f(x, y, z, \theta(x, y, z)), g_\theta = f_\theta(x, y, z, \theta(x, y, z))$$

$$\Rightarrow \nabla g = \Sigma \; ; \; \left[f_x + f_\theta \frac{\delta\theta}{\delta x}\right] = \nabla f + f_\theta \nabla\theta.$$

అట్లే $\nabla g_\theta = \nabla f_\theta + f_{\theta\theta} \nabla\theta$ అవుతుంది.

(*P వద్ద దీని అభిలంబ తలముతో సంస్పర్శక ఉత్పన్న తలము ఏర్పరచు ఖండన వక్రమునకు P వద్ద పార్శ్విక వక్రము (Cusp) ఏర్పడినందున దీనికీ పేరు వచ్చినది. దీనిని పార్శ్విక వక్రపు అంచు అనికూడా అంటాము.)

ప్రతిగమన అంచుకు $f_\theta = 0 = f_{\theta\theta} \Rightarrow \nabla g = \nabla f ; \nabla g_\theta = \nabla f_\theta$ అనగా ఉమ్మడి బిందువులన్నింటి వద్ద లాక్షణిక వక్రములు, ప్రతిగమన అంచులు ఒకే అభిలంబ రేఖలను తద్వారా ఒకే స్పర్శ తలములను కలిగి ఉంటాయి. లేక ప్రతిలాక్షణిక వక్రము, ప్రతిగమన అంచును స్పర్శిస్తుంది.

ఉదా 10 : ఉదా. 8 లోని వక్రమునకు ప్రతిగమన అంచును కనుగొనండి.

$$f(t) = 3xt^2 - 3yt + z - t^3 = 0 \Rightarrow f_t = 6xt - 3y - 3t^2 = 0, f_{tt} = 6(x - t) = 0$$

వీటినుండి $x = t, y = t^2, z = t^3$ వస్తుంది, t ని తొలగించిన $xy - z = 0, xz - y^2 = 0$ ల ఛేదన వక్రము ఇవ్వడిన ఉపరితలములకు ప్రతిగమన అంచు అవుతుంది.

ఉదా 11 : 3 పరామితుల ఉపరితలము $f(x, y, z, a, b, c) = 0$; $\phi(a, b, c) = 0$ యొక్క ఆవరణికను f, ϕ లు సమఘాత ప్రమేయములయినప్పుడు కనుగొనండి.

$$df = f_a\,da + f_b\,db + f_c\,dc = 0, d\phi = \phi_a\,da + \phi_b\,db + \phi_c\,dc = 0$$

$$\Rightarrow df + \lambda d\phi = (f_a + \lambda\phi_a)\,da + (f_b + \lambda\phi_b)\,db + (f_c + \lambda\phi_c)\,dc = 0$$

a, b, c లు స్వతంత్ర పరామితులు

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-f_a}{\phi_a} = \frac{-f_b}{\phi_b} = \frac{-f_c}{\phi_c} \qquad \text{—— (1)}$$

f, ϕ లు a, b, c లలో సమఘాతములు ,

$$\Rightarrow af_a + bf_b + cf_c = mf \qquad \text{—— (2)}$$

అనుకొనిన,

$$a\phi_a + b\phi_b + c\phi_c = n\phi$$

నాలుగు సమీకరణములు (1), (2) లనుండి a, b, c లను తొలగించి ఆవరణికను కనుగొన వచ్చును.

ఉదా 12 : $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - p^2 = 0$ అయినప్పుడు $lx + my + nz - p$ సమతలం యొక్క ఆవరణికను కనుగొనండి.

$$f = a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - p^2 = 0, F = lx + my + nz - p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F_l}{f_l} = \frac{F_m}{f_m} = \frac{F_n}{f_n} = \frac{F_p}{f_p}$$

$$\frac{x}{2a^2l} = \frac{y}{2b^2m} = \frac{z}{2c^2n} = \frac{-1}{-2p} = \frac{k}{2}$$ అనుకొనుము.

$(lF_l + mF_m + nF_n + pF_p = F \,;\, lf_l + mf_m + nf_n + pf_p = 2f$ అవుతుంది)

l, m, n లను $F = 0$ లో ప్రతిక్షేపించిన

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ ఆవరణిక అవుతుంది.

$f = 0$ లో ప్రతిక్షేపించినా ఇదే ఫలితము వస్తుంది.

ఉదా 13 : $x \sin\theta - y\cos\theta + z = a\theta$ యొక్క ఆవరణిక ప్రతిగమన అంచులను కనుగొనండి.

$$f(\theta) = x\sin\theta - y\cos\theta + z = a\theta \qquad \text{—— (1)}$$

$$f_\theta = x\cos\theta + y\sin\theta - a = 0 \qquad \text{—— (2)}$$

$$f_{\theta\theta} = -x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \qquad \text{—— (3)}$$

(2) $\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$ $(\because\ x = a\cos\theta, y = a\sin\theta)$,

(1) $\Rightarrow z = a\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ఆవరణిక ;

(3) $\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$ లేక

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

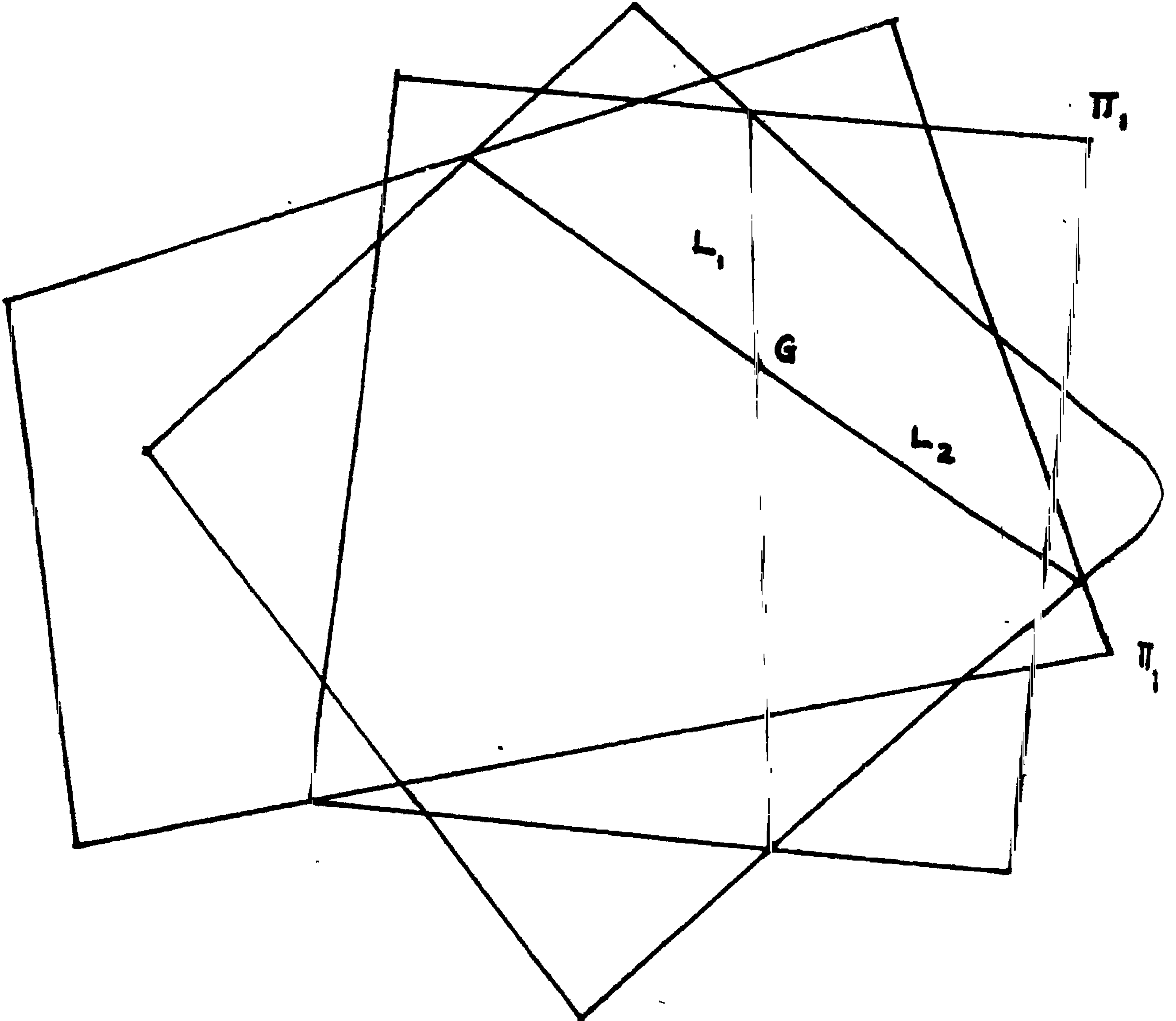
(2) $\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ మరియు

(1) $\Rightarrow z = a\tan^{-1}\frac{y}{x}$.

కావున ప్రతిగమన అంచు $x^2 + y^2 = a^2, y = x\tan\frac{z}{a}$ ల ఛేదన వక్రము అవుతుంది.

3.6 ఏక పరామితీయ సమతలముల ఆవరణిక, లాక్షణిక వక్రములు :

ఇంతకుముందు ఏక పరామితీయ ఉపరితలముల ఆవరణిక, లాక్షణిక వక్రములు మొదలగు వాటి గురించి చర్చించినాము. ఇప్పుడు ఏక పరామితీయ సమతలములను పరిశీలించుదాము. $\mathbf{r}.\mathbf{n} = a$ సమతలముల సరళిని సూచిస్తుంది. (t పరామితి; n, t యొక్క ప్రమేయము, r అటువంటి ఒక సమతలము π_1 పై బిందువు స్థాన సదిశ). ఈ సమీకరణమును t దృష్ట్యా అవకలనము చేసిన $\mathbf{r}.\dot{\mathbf{n}} = \dot{a}$ వస్తుంది. ఇది π_1 సమతలము యొక్క లాక్షణిక రేఖ L_1 ద్వారా పోవు సమతలము π_2 అయిన (లాక్షణిక రేఖ π_1 మరియు దాని సామీప్య సమతలముల



పటము 3.5

ఛేదన రేఖ అవుతుంది). $\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \ddot{a}$ అను సమతలము π_3 మూడు సామీప్య సమతలముల ఛేదనము యొక్క అవధి లేక రెండు సామీప్య లాక్షణిక రేఖల L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు అవధి రూపము అవుతుంది.

ఈ సమతలములు π_1, π_2, π_3 లు ఏకీభవించినప్పుడు L_1, L_2 లు ఈ సమతలముల పరళి ఆవరణికగా కల ఉపరితలము S యొక్క జనక రేఖలవుతాయి. L_1, L_2 ల ఖండన బిందువు G ప్రతిగమన అంచు బిందువును సమీపిస్తుంది. ఈ ప్రతిగమన అంచు ఉపరితలము S పై ఉంటుంది. ఈ ఉపరితలమును ఉత్పన్న తలము అంటాము.

ప్రతిగమన అంచు $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = a,\ \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \dot{a},\ \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \ddot{a}$ —— (1)

ల నుండి పరామితి t ని తొలిగిస్తే వస్తుంది.

$\mathbf{n}, \dot{\mathbf{n}}, \ddot{\mathbf{n}}$ లు మూడు రేఖీయ స్వతంత్ర సదిశలయిన

$\mathbf{n}\wedge\dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{n}}\wedge\ddot{\mathbf{n}}, \ddot{\mathbf{n}}\wedge\mathbf{n}$ లు కూడా రేఖీయ స్వతంత్ర సదిశలవుతాయి.

కావున

$$\mathbf{r} = \alpha(\mathbf{n}\wedge\dot{\mathbf{n}}) + \beta(\dot{\mathbf{n}}\wedge\ddot{\mathbf{n}}) + \gamma(\ddot{\mathbf{n}}\wedge\mathbf{n})$$

గ వ్రాయబడుతుంది.

ప్రారంభములోని (3) సమీకరణములు

$\mathbf{r}\cdot\mathrm{n} = \beta\,|\mathbf{n}\,\dot{\mathbf{n}}\,\ddot{\mathbf{n}}| = a,\ \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{r}\,|\mathbf{n}\,\dot{\mathbf{n}}\,\ddot{\mathbf{n}}| = \dot{a}$ మరియు

$\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \alpha\,|\mathbf{n}\,\dot{\mathbf{n}}\,\ddot{\mathbf{n}}| = \ddot{a}$ అవుతాయి.

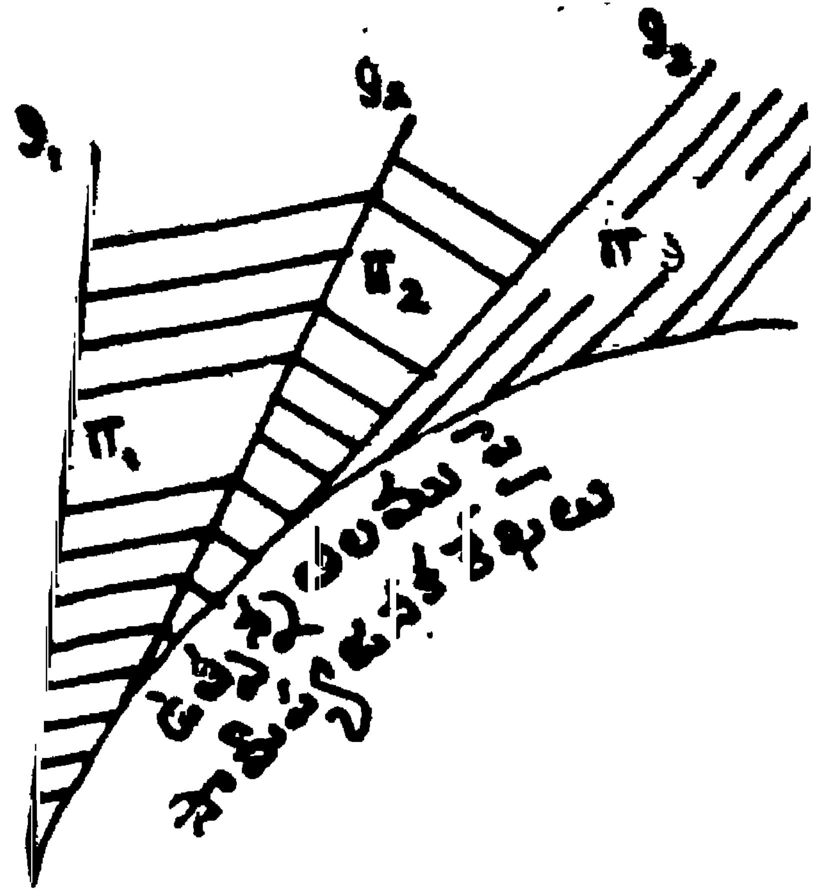
$$\Rightarrow \mathbf{r} = \frac{(\dot{\mathbf{n}}\wedge\ddot{\mathbf{n}})\,a + (\ddot{\mathbf{n}}\wedge\mathbf{n})\,\dot{a} + (\mathbf{n}\wedge\dot{\mathbf{n}})\,\ddot{a}}{(\mathbf{n}\,\dot{\mathbf{n}}\,\ddot{\mathbf{n}})}$$ అవుతుంది. —— (2)

ఏక పరామితీయ సమతలముల సమస్యలకు సమీకరణములు (1) కాని (2) కాని వాడవచ్చును.

3.7 రేఖాజన్య ఉపరితలములు – ఉత్పన్న తలములు :

ఏక పరామితీయ సరళరేఖా సరళి యొక్క చలనముచే ఏర్పడు ఉపరితలమును రేఖాజన్య ఉపరితలము అని, ఆ సరళరేఖను జనక రేఖ (ruling) అని అంటాము. రెండు సామీప్య జనక రేఖలు ఖండించుకొన్న ప్పుడు ఆ ఉపరితలమును ఉత్పన్న తలమని *, జనక రేఖలు ఖండించుకొననిచో స్క్ర్యూ ఉపరితలము (Scroll) అని అంటాము. స్క్ర్యూ ఉపరితలము గురించి 3.11 లో వివరముగ చర్చిస్తాము.

ఏకపరామితీయ సమతల సరళి యొక్క ఆవరణిక ఉత్పన్న తలము అవుతుందని 3.6 లో చూసినాము.



పటం 3.6

ఏక పరామితీయ సమతలముల సరళి $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}(t) = p(t)$ అవుతుంది. వీటి లాక్షణిక వక్రములు $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$ మరియు $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \dot{p}$ అవుతాయి. ఈ సమీకరణములు ఒక్కొక్కటి

(* ఉత్పన్నతలము పేరు వచ్చుటకు కారణము ఈ వచ్చిన ఉపరితలమును సాగతీయకుండ, చించకుండ సమతలముగ విప్పదీయ వచ్చును. ఎందుకనగ ఒక సమతలములో రెండు జనక రేఖలు (సతలీయములు కావున) ఉంటాయి. π_1లో g_1, g_2 జనక రేఖలుంటే ఆ సమతలమును g_2 దృష్ట్యా భ్రమణము చేసిన g_2, g_3 జనకరేఖలు కలిగిన సమతలము π_2గను π_2ను g_3 దృష్ట్యా భ్రమణముచేసి g_3, g_4 జనకరేఖలు కలిగిన సమతలము π_3గ మార్చవచ్చును. కావున ఈ ఉపరితలము ఈ జనక రేఖలు కలిగిన సమతలముగ పరిగణనలోనికి వస్తుంది.)

సమతలమును సూచిస్తాయి కావున లాక్షణిక వక్రములు సరళరేఖలవుతాయి. ఈ సరళ రేఖలచే ఆవరణిక ఏర్పడుచున్నది కావున ఈ సమతలముల ఆవరణికను రేఖాజన్య ఉపరితలము అంటాము.

ధర్మములు :

1. ఒక బిందువు వద్ద ప్రతిగమన అంచు యొక్క సంస్పర్శక తలము ఉత్పన్న తలమునకు ఆ బిందువద్ద స్పర్శతలము అవుతుంది.

ప్రతిగమన అంచు లాక్షణిక బిందువుల సముదాయము అవుతుంది. కావున ఏక పరామితీయసమతలములకు $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p, \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \dot{p}, \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \ddot{p}$ ల నుండి పరామితిని తొలగించిన ప్రతిగమన అంచువస్తుంది.

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \dot{p} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} = 0,$

$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \dot{p} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \ddot{p} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n}) = 0$ లేక $\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} = 0$ అవుతుంది.

అనగా $\dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}}$ లు $\mathbf{n}$ కు లంబముగ ఉంటాయి $\Rightarrow \dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}} \parallel \mathbf{n}$ కాని $\dot{\mathbf{r}}\wedge\ddot{\mathbf{r}}$ సంస్పర్శక తలమునకు లంబముగ ఉంటుంది $\Rightarrow \mathbf{n}\perp$ సంస్పర్శక తలము ; -

$\mathbf{n}\perp(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - p = 0) \Rightarrow$ సంస్పర్శక తలము ఉత్పన్న తలముయొక్క స్పర్శతలము అవుతుంది.

2. ఉత్పన్నతల జనకరేఖ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద స్పర్శతలము ఒకటే ఉంటుంది.

ఉత్పన్నతల సమీకరణము $R = \mathbf{r}(t) + \lambda\dot{\mathbf{r}}(t)$, ($\mathbf{r}$ ప్రతిగమన అంచుపై బిందువు) అవుతుంది. ఈ ఉపరితలమునకు అభిలంబరేఖ

$\parallel R_t \wedge R_\lambda$ కాని $R_t \wedge R_\lambda = (\dot{\mathbf{r}} + \lambda\ddot{\mathbf{r}})\wedge\dot{\mathbf{r}} = \lambda(\ddot{\mathbf{r}}\wedge\dot{\mathbf{r}})$, అనగా ఉత్పన్న తలముయొక్క అభిలంబరేఖ ప్రతిగమన వక్రము యొక్క ఉపాభిలంబరేఖకు సమాంతరము మరియు ఈ ధర్మము λ యొక్క అన్ని విలువలకు (అనగ జనకరేఖ యొక్క అన్ని బిందువులకు) వర్తిస్తుంది. స్పర్శతలము ఒకటే ఉంటుంది.

ఉదా 14 : $(6t, 3t^2, 2t^3)$ ప్రతిగమన అంచుగా కల ఉత్పన్న తల సమీకరణము వ్రాయండి.

మొదటి పద్ధతి : దత్త వక్రము యొక్క సంస్పర్శక తల సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-6t & y-3t^2 & z-2t^3 \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = 0 \text{ లేక}$$

$$xt^2 - 2ty + z - 2t^3 = f(t) = 0 \qquad \text{—— (1)}$$

దీని అవరణిక కనుగొనుటకు

$$f_t = 2tx - 2y - 6t^2 = 0 \qquad \text{—— (2)}$$

మరియు (1) లనుండి t ని తొలగించవలెను.

$$(1) \Rightarrow t(-6t^2 + 2tx - 2y) + (t^2x - 4ty + 3z) = 0$$

$$\Rightarrow t^2x - 4ty + 3z = 0 \qquad \text{—— (3)}$$

(2), (3) ల నుండి

$$\frac{t^2}{4y^2 - 3zx} = \frac{t}{xy - 9z} = \frac{1}{x^2 - 12y} \text{ లేక}$$

$$(xy - 9z)^2 = (4y^2 - 3zx)(x^2 - 12y) \qquad \text{—— (A)}$$

ఉత్పన్న తలము అవుతుంది.

రెండవ పద్ధతి : $r = (6t, 3t^2, 2t^3) \Rightarrow \dot{r} = (6, 6t, 6t^2)$

కావున ఉత్పన్న తల సమీకరణము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\dot{\mathbf{r}}$

$$\Rightarrow x - 6t = 6\lambda,\ y - 3t^2 = 6\lambda t,\ z - 2t^3 = 6\lambda t^2 \qquad \text{—— (B)}$$

λ, t లు పరామితులు

(A), (B) లు ఒకే ఉపరితలమును సూచిస్తాయి.

ఉదా 15 : $xt^2 - 4ty + 3z = 0,\ 3t^2 - xt + y = 0$ ల ద్వారా పోతు ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు కనుగొనండి.

ఉత్పన్న తలము యొక్క జనకరేఖలు ప్రతిగమన అంచుకు స్పర్శరేఖలవుతాయి.

$$xt^2 - 4ty + 3z = 0,\ 3t^2 - xt + y = 0\ ;\ x\,(t + \delta t)^2 - 4y\,(t + \delta t) + 3z = 0,$$

$$3\,(t + \delta t)^2 - x\,(t + \delta t) + y = 0 \text{ లు}$$

ఈ ఉత్పన్న తలము యొక్క రెండు జనక రేఖలవుతాయి.

$\Rightarrow\ xt^2 - 4ty + 3z = 0,\ 3t^2 - xt + y = 0;$

$(2tx - 4y)\,\delta t = 0,\ (6t - x)\,\delta t = 0$ లు $O(\delta t^2) \to 0$ అయిన జనకరేఖలవుతాయి.

$\Rightarrow\ x = \dfrac{2y}{t},\ x = 6t$ లేక $x = 6t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ (దత్త సమీకరణము నుండి) అవుతుంది.

$\Rightarrow\ 3zx - 4y^2 = 0,\ xy - 9z = 0$ ల ఛేదన వక్రము ఉత్పన్న తలమునకు ప్రతిగమన అంచే అవుతుంది.

3.8 ఉత్పన్న తలము యొక్క అవకలన సమీకరణము :

$z = f(x, y)$ ఉత్పన్న తలమును సూచించుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $s^2 = rt$ అవుతుంది.

ఆవశ్యకత : ఉపరితలమునకు (x_1, y_1, z_1) వద్ద స్పర్శతలము

$(x - x_1)\,f_x + (y - y_1)\,f_y + (z - z_1)\,(-1) = 0$ అవుతుంది. అనగ ఉత్పన్న తలములకు $f_x\ f_y$ ల మధ్య ఒక సంబంధము వ్యవస్థితమవుతుంది. లేక f_xను f_y ప్రమేయముగ వ్రాయవచ్చును. $f_x = \phi\,(f_y)$ అయిన

$f_{xx} = \phi\ \ f_{xy},\ f_{yx} = \phi'\,f_{yy} \Rightarrow\ f_{xy}\,f_{yx} = f_{xx}$ లేక $s^2 = rt$ అవుతుంది.

పర్యాప్తము : $p = f_x,\ q = f_y$ అనుకొనిన

$$rt = s^2 = 0\ \Rightarrow\ p_x\,q_y - p_y\,q_x = \partial\ \Rightarrow \frac{\partial\,(f_x, f_y)}{\partial\,(x,\ y)} = 0$$

$\Rightarrow\ f_x, f_y$లు ఏక పరామితీయ ప్రమేయములు

$\Rightarrow$ ఉపరితలమునకు స్పర్శతలము ఏకపరామితీయము

$\Rightarrow$ ఉపరితలము ఉత్పన్న తలము అవుతుంది.

ఉదా 16 : $xyz = a^3$ ఉత్పన్న తలము అవుతుందా, కాదా పరిశీలించండి.

$$z = \frac{a^3}{xy} \Rightarrow p = \frac{-a^3}{x^2y}, q = \frac{-a^3}{xy^2}, r = \frac{2a^3}{x^3y}, t = \frac{2a^3}{xy^3}, s = \frac{a^3}{x^2y^2}$$

$s^2 = \frac{a^6}{x^4y^4}, rt = \frac{4a^6}{x^4y^4}$; $s^2 \neq rt$ కావున ఈ ఉపరితలము ఉత్పన్న తలము కాదు.

ఉదా 17 : $xyg(z) = a^3$ ఉత్పన్న తలమయిన $g(z)$ను వివరించండి.

ఈ సమీకరణమును x దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనము చేసిన

$$yg + xyg' p = 0 \Rightarrow p = \frac{-g}{g'x}$$

తిరిగి x దృష్ట్యా, y దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనము చేసిన

$$r = \frac{g}{x^2g'}\left(z - \frac{gg''}{g'^2}\right);$$

$$s = \frac{g}{xyg'}\left(1 - \frac{gg''}{g'^2}\right)$$ వస్తుంది.

ఇదే విధముగ $t = \frac{g}{y^2g'}\left(z - \frac{gg}{g'^2}\right)$ వస్తుంది.

ఈ ఉపరితలము ఉత్పన్న తలము అవుతుంది. కావున $rt = s^2$ అవుతుంది.

అనగ $g(z)$ పై అవకలన సమీకరణమును సంతృప్తి పరుస్తుంది.

3.9 అంతరాళములోని వక్రమునకు సంబంధించిన ఉత్పన్న తలములు :

ఒక వక్రము యొక్క చలన సదిశా త్రికము **t, n, b** లతో ఏర్పడు సమతలములు - సంస్పర్శక తలము, అభిలంబ తలము, చాపకలనీయ తలములు ఏకపరామితి (s) పై ఆధారపడి ఉంటాయి. కావున వాటి ఆవరణికలు ఉత్పన్న తలములు అవుతాయి. వీటిని సంస్పర్శక (స్పర్శీయ) ఉత్పన్న తలము, ధృవీయ ఉత్పన్న తలము, చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము (ప్రతి వక్రము దాని చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలములో ఒక జియోడెసిక్ (geodesic) అవుతుంది. కావున 'చాపకలనీయత' పేరు వచ్చినది.) అంటాము. వీటి జనక రేఖలను వరుసగ స్పర్శరేఖలు, ధృవరేఖలు, చాపకలనీయ రేకలు అంటాము.

ధర్మాలు : 1. సంస్పర్శక ఉత్పన్న తలమునకు ప్రతిగమన వక్రము దత్త వక్రము అవుతుంది. బిందువు (r) వద్ద సంస్పర్శకతల సమీకరణము

$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{b}=0$ అవుతుంది. —— (1)

$\Rightarrow -\mathbf{r}'\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\tau n=0 \Rightarrow (\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot n=0$ $(\because \tau\neq 0)$ అవుతుంది —— (2)

తిరిగి $-\mathbf{r}'\cdot n+(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})=0 \Rightarrow (\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{t}=0$ —— (3)

లాక్షణిక వక్రము (1), (2) ల నుండి సంస్పర్శక, చాపకలనీయ తలముల ఖండన రేఖ 'స్పర్శరేఖ' అవుతుంది. ప్రతిగమన వక్రము (1), (2), (3) ల నుండి $\mathbf{R}-\mathbf{r}=0$ లేక దత్త వక్రము.

2. ధృవీయ ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన వక్రము సంస్పర్శక గోళముల కేంద్రముల బిందు పథము అవుతుంది.

వక్రముపై బిందువు (r) వద్ద అభిలంబ తలము (R − r) అవుతుంది. —— (1)

$\Rightarrow -\mathbf{r}'.\mathbf{t}+(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot kn=0$ లేక $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot n=\rho$ లేక

$[\mathbf{R}-(\mathbf{r}+\rho n)]\cdot n=0$ —— (2)

$\Rightarrow (\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})-rin=\rho'$ లేక $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})=\rho'$

లేక $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot b=\sigma\rho'$ —— (3)

లాక్షణిక వక్రము (1), (2) ల నుండి **b**కి సమాంతరముగ వక్రతా కేంద్రము ద్వారాపోవు సరళరేఖ (ధృవరేఖ) అవుతుంది. ధృవరేఖ వక్రతా వృత్తము యొక్క అక్షము అవుతుంది. ప్రతిగమన వక్రము (1), (2), (3) ల నుండి

$\mathbf{R}-\mathbf{r}=\rho n+\sigma\rho'\mathbf{b}$ లేక $\mathbf{R}-s$ అనగా **R** సంస్పర్శక గోళ కేంద్రముతో ఏకీభవిస్తుంది.

⇒ ప్రతిగమన వక్రము వక్రతా గోళ కేంద్రము యొక్క బిందు పథము అవుతుంది.

ఈ వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖలు ధృవరేఖలవుతాయి.

3. చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన వక్రము

$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\dfrac{k\,(\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})}{k'\,\tau-k\tau'}$ సమీకరణము కలిగి ఉంటుంది.

(r) వద్ద చాపకలనీయ తల సమీకరణము $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}=0$ అవుతుంది. —— (1)

$\Rightarrow -\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}+(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})=0$ లేక $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})=0$ —— (2)

$\Rightarrow -\mathbf{r}'\cdot(\mathbf{R}\mathbf{b}-k\mathbf{t})+(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau'\mathbf{b}-k'\mathbf{t}-\tau^2\mathbf{n}-k^2\mathbf{n})=0$ లేక

$k+(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\tau'\mathbf{b}-k'\mathbf{t})=0$ అవుతుంది —— (3)

లాక్షణిక వక్రము (చాపకలనీయ రేఖలు) (1), (2) ల నుండి **r** ద్వారా పోవుచు **n**కు మరియు $(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})$ కి లంబములు అవుతాయి. లేక

$\mathbf{n}\wedge(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})\ (=\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})$ కి సమాంతర మవుతాయి.

డార్బ్క్స్ సదిశ $(\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})\ \perp(\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t})\ ;\ \tau\mathbf{t}+k\mathbf{b}\perp\mathbf{n}$

(1) నుండి $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\perp\mathbf{n}\Rightarrow\mathbf{R}-\mathbf{r}\,||\ \tau\mathbf{t}+k\mathbf{b}$

$\Rightarrow$ $(\mathbf{R}-\mathbf{r})$ అను సదిశ **t**తో $\phi=\tan^{-1}\dfrac{k}{\tau}$ కోణము చేస్తుంది.

కావున చాపకలనీయ రేఖ $(\mathbf{R}-\mathbf{r})=\lambda(\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})$ —— (4)

రూపములో ఉంటుంది.

ప్రతిగమన వక్రము (1), (2), (3) ల నుండి లేక (3), (4) ల నుండి

$\lambda(k'\tau-k\tau')-k=0$ లేక $\lambda=\dfrac{k}{k'\tau-k\tau'}$ కావున

$\mathbf{R}-\mathbf{r}=\dfrac{k(\tau\mathbf{t}+k\mathbf{b})}{k'\tau-k\tau'}$ అవుతుంది.

ఉదా 18 : ఒక వక్రము యొక్క చాపకలనీయ ఉత్పన్నతలము, ఆ వక్రము యొక్క ప్రతి కేంద్రజమునకు ధృవీయ ఉత్పన్న తలము అవుతుందని చూపండి.

C యొక్క ప్రతి కేంద్రజ సమీకరణము $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+(C-S)\,\mathbf{t}$ అవుతుంది —— (1)

C యొక్క చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}=0$ —— (2)

ల ఆవరణిక ; C_1 యొక్క ధృవీయ ఉత్పన్న తలము

$(\mathbf{R}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{t}_1=0$ —— (3) ల ఆవరణిక అవుతాయి.

(1) $\Rightarrow$ $\mathbf{t}_1 S_1' = \mathbf{t} + (C - S)\,k\mathbf{n} - \mathbf{t}$ లేక $\mathbf{t}_1 = \mathbf{n}$ అవుతుంది.

కావున (3)

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r} - (C - S)\,\mathbf{t}] \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ లేక } (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{—— (2)}$$

అవుతుంది.

కావున వాటి ఆవరణికలు అనగ వక్రము C యొక్క చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము దాని ప్రతి కేంద్రజము C_1 యొక్క ధృవీయ ఉత్పన్న తలము అవుతుంది.

ఉదా 19 : చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన వక్రము యొక్క వక్రతా వ్యాసార్థము, విమోటన వ్యాసార్థములు కనుగొనండి.

అంతరాళములోని ఒక వక్రమునకు ఒక బిందువు r(s) వద్ద గీసిన చాపకలనీయ సమతలము $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$ అవుతుంది —— (1)

$$\Rightarrow (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot (\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}) = 0 \text{ లేక } (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot (B - \tan\theta\mathbf{t}) = 0 \quad \text{—— (2) ;}$$

$$\tan\phi = \frac{\sigma}{P}.$$

$$\Rightarrow (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(-\tau\mathbf{n} - k\tan\phi\mathbf{n} - \sec^2\phi\frac{d\phi}{ds}\mathbf{t}\right) + \tan\phi = 0 \text{ లేక}$$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = \sin\phi\cos\phi\,\frac{ds}{d\phi} \quad \text{—— (3)}$$

(2) $\Rightarrow$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \tan\phi\,(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = \sin^2\phi\frac{ds}{d\phi} = \lambda \quad \text{—— (A) అయిన}$$

$$\lambda^{-1} = -(\cot\phi)' \quad \text{—— (4)}$$

కావున ప్రతిగమన వక్రము (1), (2), (3) ల నుండి వస్తుంది.

(2) $\Rightarrow$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \tan\phi\,(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = \lambda \Rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{r} = \lambda\,(\mathbf{b} + \cot\phi\,\mathbf{t})$$

R కు సంబంధించిన జ్యామితీయ రాశులకు, 1 పాదిక వ్రాసిన

$$t_1 \frac{dS_1}{dS} = t + \lambda^1 (\cot \phi t + b) + \lambda \left(k \cot \phi n - \frac{1}{\lambda} t - \tau n \right)$$

$$= \lambda^1 (\cot \phi t + b) \Rightarrow S_1{}^1 = \frac{\lambda^1}{\sin \phi} \quad \text{—— (a)}$$

$$\therefore \; t_1 = \cos \phi t + \sin \phi b \quad \text{—— (5)}$$

$$\Rightarrow k_1 n_1 S_1{}^1 = (-\sin \phi t + \cos \phi b) \frac{d\phi}{dS} + (k \cos \phi n - \tau \sin \phi n)$$

$$= (-\sin \phi t + \cos \phi b) \frac{d\phi}{dS}$$

$$\Rightarrow k_1 \frac{dS_1}{dS} = \frac{d\phi}{dS} \; ; n_1 = -\sin \phi t + \cos \phi b \quad \text{—— (6)}$$

(6) $\Rightarrow$

$$\rho_1 = \frac{dS_1}{dS} \cdot \frac{dS}{d\phi} = \lambda^1 \operatorname{cosec} \phi \frac{dS}{d\phi} \quad (4 - a \text{ నుండి})$$

$$= \frac{d}{dS} \left(\sin^2 \phi \frac{dS}{d\phi} \right) \operatorname{cosec} \phi \frac{dS}{d\phi} \quad (3 - A \text{ నుండి})$$

$$= \operatorname{cosec} \phi \frac{d}{d\phi} \left(\sin^2 \phi \frac{dS}{d\phi} \right) \quad \text{—— } (\alpha)$$

$b_1 = t_1 \wedge n_1 = -n$ (5, 6 ల నుండి)

$$\Rightarrow -\tau_1 n_1 \frac{dS_1}{dS} = (kt - \tau b) = k (t - \cot \phi b) = \frac{k (\sin \phi t - \cos \phi b)}{\sin \phi}$$

$$= \frac{-k}{\sin \phi} n$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{k}{\sin \phi} \cdot \frac{\sin \phi}{\lambda^1} \text{ లేక } |\sigma_1| = \rho \left(\sin^2 \phi \frac{dS}{d\phi} \right)^1 \quad \text{——— } (\beta) \text{ అవుతుంది.}$$

(α), (β) లు వాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన వక్రపు వక్రతా వ్యాసార్ధము, విమోటనా వ్యాసార్ధములను సూచిస్తాయి.

ఉదా 20 : $z = 0, y^2 = 4ax$; $x = 0, y^2 = 4bz$ ల ద్వారాపోవు ఉత్పన్న తల సమీకరణము కనుగొనండి.

$z = 0, y^2 = 4ax$ను స్పర్శించు సమతలము

$y = mx + \frac{a}{m} + \lambda z$ అవుతుంది. ఈ సమతలము $x = 0, y^2 = 4bz$ను కూడ స్పర్శిస్తే సమతల సమీకరణము

$y = \lambda z + \frac{b}{\lambda}$ రూపములో ఉంటుంది.

$\Rightarrow \frac{b}{\lambda} = \frac{a}{m}$ లేక $\lambda = \frac{bm}{a}$; అనగ

$y = mx + \frac{mbz}{a} + \frac{a}{m}$ పై రెండు వక్రములను స్పర్శిస్తుంది. ఈ సమీకరణమును m దృష్ట్యా పాక్షిక అవకలనము చేసిన

$x + \frac{bz}{a}\frac{-a}{m^2} = 0$ లేక $m^2 = \frac{a^2}{ax + bz}$

అవుతుంది. కావున ఉత్పన్న తలము (ఆవరణిక) ఈ రెండు సమీకరణముల నుండి mను తొలగించిన $y^2 = 4(ax + bz)$ అవుతుంది.

ఉదా 21 : $x = 0, z^2 = 4ay$; $x = a, y^2 = 4az$ ల ద్వారాపోవు ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు $\frac{3x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{3(a - x)}$ చే సూచింపబడుతుంది.

$x = 0, z^2 = 4ay$ ని స్పర్శించు సమతలము

$z = my + \frac{a}{m} + \lambda x$చే కాని లేక

$y = \frac{z}{m} - \left(\frac{a}{m} + \lambda x\right)\frac{1}{m}$ చే కాని సూచింపబడుతుంది.

ఇది $x = a, y^2 = 4az$ను కూడ స్పర్శించిన సమతల సమీకరణము

$y = \frac{z}{m} + am$ రూపములో ఉంటుంది.

$\Rightarrow \frac{-a}{m}\left(\frac{1}{m} + \lambda\right) = am$ లేక $\lambda = \frac{-(1 + m^3)}{m}$ అవుతుంది.

కావున ఇవ్వబడిన రెండు పరావలయములను స్పర్శించు సమతలము

$z = my + \frac{a}{m} - \frac{(1 + m^3)}{m}x$ లేక $f(m) \equiv m^3x - 2my + z = 0$ అవుతుంది.

ప్రతిగమన అంచు పై సమీకరణము, $f(m) \equiv 3m^2x - 2my + z = 0$ మరియు

$f(m) = 6m\,x - 2y = 0$ లనుండి m తొలగించిన వస్తుంది.

$\Rightarrow m = \frac{y}{3x}$; $f'(m) = 0$ ను $(3x)$ చే భాగించిన $m^2 - \frac{2my}{3x} + \frac{z}{3x} = 0$

అనగ $m^2 - 2m(m) + \frac{z}{3x} = 0$ లేక $m^2 = \frac{z}{3x}$ అవుతుంది.

$f(m) = 0$ ను x చే భాగించిన $m^3 - m^2\frac{y}{x} + \frac{mz}{x} + \frac{x-a}{x} = 0$

$\Rightarrow m^3 - m^2(3m) + m(3m^2) = \frac{a-x}{x}$ లేక $m^3 = \frac{a-x}{x}$ అవుతుంది.

$(m^2)^2 = m^3 \cdot m$; $m^3 = (m^2)\,m$ల నుండి

$\frac{z^2}{9x^2} = \frac{y(a-x)}{3x^2}$; $\frac{a-x}{x} = \frac{78}{9x^2}$

$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{z}{3(a-x)}$; $\frac{3x}{y} = \frac{z}{3(a-x)}$ ప్రతిగమన అంచును సూచిస్తుంది.

ఉదా 22 : $z = 0, y^2 = 4ax$; $x = 0, (y-a)^2 = 4az$ అను పరావలయముల ద్వారాపోవు ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు వక్రము

$(a+y)^2 = 3a(x+y+z), (a+y)^3 = 27a^2x \cdot z = 0, y^2 = 4ax$ ను స్పర్శించు సమతలము

$y = mx + \frac{a}{m} + \lambda z$ రూపములో ఉంటుంది. ఈ సమతలము

$x = 0, (y-a)^2 = 4az$ ను స్పర్శించిన సమతల సమీకరణము

$y - a = \lambda z + \left(\frac{a}{m} - a\right) + m \cdot 0, (y-a) = \lambda z + \frac{a}{\lambda}$ రూపములో ఉంటుంది.

$\Rightarrow \frac{a}{m} - a = \frac{a}{\lambda}$ లేక $\lambda = \frac{m}{1-m}$ అవుతుంది.

అనగ $y = mx + \frac{a}{m} + \frac{m}{1-m}z$ అను సమతలము ఈ రెండు పరావలయముల స్పర్శిస్తుంది.

అనగ $f(m) = m^3x - m^2(x+y+z) + m(a+y) - a = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow f_m = 3m^2x - 2m(x+y+z) + (a+y) = 0$;

$$f_{mm} = 6mx - 2(x + y + z) = 0 \Rightarrow m = \frac{x + y + z}{3x}$$

కావున $f_m = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{a + y}{3x}$ మరియు

$f = 0 \Rightarrow m^3 = \frac{a}{x}$ అవుతుంది.

$$(m^2)^2 = m^3 \cdot m \; ; (m^3)^2 = (m^2)^3$$

$$\Rightarrow (a + y)^2 = 3a(x + y + z) \; ; (a + y)^3 = 27a^2x$$

దత్త ఉపరితలము యొక్క ప్రతిగమన అంచును సూచిస్తుంది.

ఉదా 23 : $x = 6t, y = 3t^2, z = 2t^3$ ప్రతిగమన అంచుగా కల ఉత్పన్న తలమును కనుగొనండి.

ప్రతిగమన అంచు $\mathbf{r} = (6t, 3t^2, 2t^3) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = (6, 6t, 6t^2)$ (t) బిందువు వద్ద వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖను $\frac{dr}{dt}$ సూచిస్తుంది ; ఉత్పన్న తలమునకు ప్రతిగమన అంచు యొక్క స్పర్శరేఖ జనకరేఖ అవుతుంది. కావున ఉత్పన్న తలముపై చలన బిందువు స్థాన సదిశ $\mathbf{R}(x, y, z)$ అయిన

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\dot{\mathbf{r}} \text{ లేక } \frac{x - 6t}{1} = \frac{y - 3t^2}{t} = \frac{z - 2t^3}{t^2} (= 6\lambda)$$

ల నుండి పరామితి (t) ని తొలగించవలెను.

$xt - y = 3t^2 \; ; yt - z = t^3 \Rightarrow t(xt - y) (= 3t^3) = 3(yt - z)$ లేక

$xt^2 - 4yt + 3z = 0$ అవుతుంది కాని $3t^2 - xt + y = 0$.

$$\Rightarrow \frac{t^2}{3zx - 4y^2} = \frac{t}{9z - xy} = \frac{1}{92y - x^2} \text{ లేక}$$

$(9z - xy)^2 = (12y - x^2)(3zx - 4y^2)$ ఉత్పన్న తలమును సూచిస్తుంది.

ఉదా 24 : ఒక ఉత్పన్న తలము రెండు దత్త వక్రములను ఆవరించి ఉంటుందని చూపండి.

ఒక సమతలమునకు సాధారణముగ (3) పరామితులుంటాయి. ఆ సమతలము ఒక వక్రమును స్పర్శించిన ఒక పరామితి తొలగించబడుతుంది. ఇంకొక వక్రమును స్పర్శించినక ఇంకొక పరామితి తొలగించబడుతుంది. ఏక పరామితీయ సమతలముల ఆవరణిక ఉత్పన్న తలము అవుతుంది.

3.10 ద్విపరామితీయ ఉపరితలములు :

a, bలు స్వతంత్ర పరామితులయిన $f(x, y, z, a, b) = 0$ అను సమీకరణము ∞^2 ఉపరితలముల సముదాయమును సూచిస్తుంది. ఈ సముదాయము యొక్క ఒక్కొక్క ఉపరితలమునకు a, bలు స్థిరరాశులవుతాయి. దీనిని $f(a, b) = 0$గ కూడా వ్రాస్తాము.

లాక్షణిక బిందువులు :

$f(\alpha, \beta) = 0, f(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = 0$లు రెండు సామీప్య ఉపరితలములు అయిన పై రెండు సమీకరణములు వాటి ఛేదన వక్రమును సూచిస్తాయి. మొదటి ఘాత పదముల వరకు ఉజ్జాయింపుగ ఈ సమీకరణములు

$$f(\alpha, \beta) = 0, f(\alpha, \beta) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\delta\beta\right) = 0 \text{ లేక}$$

$$f(\alpha, \beta) = 0 = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\delta\beta \text{ అవుతాయి.}$$

ఈ వక్రము $\delta\alpha : \delta\beta$ పై ఆధారపడి ఉంటుంది కావున $\frac{\delta\beta}{\delta\alpha} = \lambda$ అయిన వక్ర సమీకరణములు $f(\alpha, \beta) = 0, f_x + \lambda f_\beta = 0$ అవుతాయి. $\delta\alpha, \delta\beta$ లు స్వతంత్ర రాశులు కావున λ విలువ ఏదైనా ఉండవచ్చును. అయితే వక్రము అవధి రూపములో λ పై ఆధారపడి ఉంటుంది. λ యొక్క అన్ని విలువలకు అవధి రూపములోని వక్రము $f = 0, f_\alpha = 0, f_\beta = 0$లచే సూచించు బిందువుల ద్వారాపోతుంది. ఈ బిందువులను లాక్షణిక బిందువులు అంటాము.

ఆవరణిక : లాక్షణిక బిందువుల బిందుపథమును ఇవ్వబడిన ఉపరితలముల సముదాయము యొక్క ఆవరణిక అంటాము. ఈ ఆవరణికను $f = 0 = f_\alpha = f_\beta$ల నుండి α, βలను తొలగించి కనుగొంటాము.

ధర్మము : ఆవరణిక ఒక్కొక్క ఉపరితలమును అనురూప లాక్షణిక బిందువుల వద్ద స్పర్శిస్తుంది లేక ఆవరణిక, ఉపరితలములకు లాక్షణిక బిందువుల వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శతలము ఉంటుంది.

లాక్షణిక బిందువులు $f = 0, f_\alpha = 0, f_\beta = 0$లచే సూచింపబడుతాయి. మరియు ఆవరణిక వీటి నుండి α, βలను తొలగించిన వస్తుంది. కావున α, βలను x, y, zల ప్రమేయముగ భావించి

$f_\alpha = 0, f_\beta = 0$ల నుండి కనుగొని $f(\alpha, \beta) = 0$లో ప్రతిక్షేపిస్తే $f(\alpha, \beta) = 0$ సమీకరణమే ఆవరణిక అవుతుంది. ఉపరితలము, ఆవరణికల అభిలంబరేఖలు

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) \ \nabla E, E = f(x, y, z, \alpha(x, y, z), \beta(x, y, z))$$

అనగా $\nabla E = \sum i\,(f_x + f_\alpha \alpha_x + f_\beta \beta_x) = \nabla f = f_\alpha \nabla\alpha + f_\beta \nabla\beta = \nabla f \ (\because f_\alpha = 0 = f_\beta)$

లచే సూచింపబడుతాయి. $\nabla E = \nabla f \Rightarrow$ ఉపరితలము, ఆవరణికల అభిలంబరేఖలు తద్వారా (లాక్షణిక బిందువుల వద్ద) స్పర్శతలములు ఏకీభవిస్తాయి.

సిద్ధాంతము :

$F(x, y, z, a, b, c) = 0$ అను ఉపరితలమునకు పరామితులు a, b, c, $f(a, b, c) = 0$ అను సంబంధము కలిగి ఉన్నప్పుడు ఆవరణిక

$F = 0, f = 0, \dfrac{F_a}{f_a} = \dfrac{F_b}{f_b} = \dfrac{F_c}{f_c}$ ల నుండి a, b, c లను తొలగించగ వస్తుంది. a, b లు స్వతంత్ర పరామితులు, c పరామితి a, b లతో $f(a, b, c) = 0$ కలిగి ఉన్నదని అనుకొనిన

$$F(a, b, c) = 0 \Rightarrow F_a + F_c \frac{\partial c}{\partial a} = 0, F_b + F_c \frac{\partial c}{\partial b} = 0;$$

$f(a, b, c) = 0 \Rightarrow f_a + f_c \dfrac{\partial c}{\partial a} = 0, f_b + f_c \dfrac{\partial c}{\partial b} = 0$ అవుతాయి.

$$\Rightarrow \frac{F_a}{F_c} = \frac{f_a}{f_c}\left(= -\frac{\partial c}{\partial a}\right), \frac{F_b}{F_c} = \frac{f_b}{f_c} = \left(-\frac{\partial c}{\partial b}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{F_a}{f_a} = \dfrac{F_b}{f_b} = \dfrac{F_c}{f_c}$ అవుతుంది.

ఆవరణిక లాక్షణిక బిందువుల బిందుపథము అవుతుంది కావున (4) సమీకరణములు

$F = 0, f = 0, \dfrac{F_a}{f_a} = \dfrac{F_b}{f_b} = \dfrac{F_c}{f_c}$ ల నుండి a, b, c లను తొలగిస్తే వస్తుంది.

ఉదా 25 : λ, μ లు పరామితులయిన

$(\mu - \lambda)\dfrac{x}{a} + (1 + \lambda\mu)\dfrac{y}{b} + (1 - \lambda\mu)\dfrac{z}{c} = \lambda + \mu$ ల ఆవరణిక కనుగొనండి.

$$f(\lambda, \mu) = (\mu - \lambda)\frac{x}{a} + (1 + \lambda\mu)\frac{y}{b} + (1 - \lambda\mu)\frac{z}{c} - (\lambda + \mu) = 0 \qquad \text{—— (1)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda = \frac{-x}{a} + \frac{\mu y}{b} - \frac{\mu z}{c} - 1 = 0, f_\mu = \frac{x}{a} + \frac{\lambda y}{b} - \frac{\lambda z}{c} - 1 = 0 \qquad \text{—— (2)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{bc\,(a - x)}{a\,(cy - bz)}\,;\ \mu = \frac{bc\,(x + a)}{a(cy - bz)}$$ (సమీ. (2) నుండి)

$$(1) \Rightarrow \frac{2bcx^2}{a^2\,(cy - bz)} + \frac{cy + bz}{bc} + \frac{b^2c^2\,(a^2 - x^2)\,(cy - bz)}{a^2\,(cy - bz)^2\,bc} = \frac{2bc}{cy - bz}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{a^2} + \frac{c^2y^2 - bz^2}{bc^2} + \frac{a^2 - x^2}{a^2} = 2$$ లేక

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ అవుతుంది.

ఉదా 26 : ఒక సమతలము నిరూపకాక్షములలో a, b, c అంతర్ఖండములను

$a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = K^{-2}$ అగునట్లు చేసిన ఆవరణిక సమీకరణము వ్రాయండి.

$$F(x, y, z, a, b, c) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0\,;\ f(a, b, c) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{K^2} = 0$$

$$F_a = \frac{-x}{a^2}, F_b = \frac{-y}{b^2}, F_c = \frac{-z}{c^2}\,;\ f_a = \frac{-2}{a^3}, f_b = \frac{-2}{b^3}, f_c = \frac{-2}{c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{F_a}{f_a} = \frac{ax}{2}, \frac{F_b}{f_b} = \frac{by}{2}, \frac{F_c}{f_c} = \frac{cz}{2}$$ కావున

$$\frac{F_a}{f_a} = \frac{F_b}{f_b} = \frac{F_c}{f_c} \Rightarrow ax = by = cz$$

లేక $b = \frac{ax}{y}, c = \frac{ax}{z}$. $F = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = ax$ మరియు

$$f = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2x^2}{K^2}$$ లేక $x^2 + y^2 + z^2 = K^2$

దత్త సమతలముల ఆవరణిక అవుతుంది.

ఉదా 27 : $lx + my + nz = p$ అను సమతలము యొక్క ఆవరణిక

$a^2l^2 + b^2m^2 + 2np = 0$ అయినప్పుడు $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ అని చూపండి.

$$F(l, m, n, x, y, z) = lx + my + nz - p; f(l, m, n) \equiv a^2l^2 + b^2m^2 + 2np$$

$$F_l = x, F_m = y, F_n = z, F_p = -1 ; f_l = 2a^2l, f_m = 2b^2m, f_n = 2p, f_p = 2n$$

$$\frac{F_l}{f_l} = \frac{F_m}{f_m} = \frac{F_n}{f_n} = \frac{F_p}{f_p} \Rightarrow \frac{x}{2a^2l} = \frac{y}{2b^2m} = \frac{z}{2p} = \frac{-1}{2n}$$

$$\Rightarrow l = \frac{-nx}{a^2}, m = \frac{-ny}{b^2}, p = -nz.$$

ఈ ఫలితములను $F = 0$ లో కాని $f = 0$ లో కాని ప్రతిక్షేపించిన

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ - పరామితులు లేని సంబంధము వస్తుంది. ఇది దత్త సమతలముల ఆవరణికను సూచిస్తుంది.

ఉదా 28 : ఏకనాభీయ శాంకవజములకు (α, β, γ) నుండి అభిలంబరేఖలు గీయబడినవి. లంబపాదముల వద్ద కల స్పర్శతలముల ఆవరణికచే సూచింపబడు ఉత్పన్నతల సమీకరణము కనుగొనండి.

$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$ లు ఏకనాభీయ శాంకవజములు.

(x_1, y_1, z_1) వద్ద గీయబడిన అభిలంబరేఖ $\dfrac{x - x_1}{\frac{2x_1}{a^2 - \lambda}} = \dfrac{y - y_1}{\frac{2y_1}{b^2 - \lambda}} = \dfrac{z - z_1}{\frac{2z_1}{c^2 - y}}$ అవుతుంది.

ఈ అభిలంబరేఖ (α, β, γ) ద్వారా పోయిన

$\dfrac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2 - \lambda}} = \dfrac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2 - \lambda}} = \dfrac{\gamma - z_1}{\frac{z_1}{c^2 - \lambda}}$ $(= r)$ లేక శాంకవజముపై బిందువు

$$\left(\frac{\alpha (a^2 - \lambda)}{a^2 + \gamma - \lambda}, \frac{\beta (b^2 - \lambda)}{b^2 + \gamma - \lambda}, \frac{\gamma (c^2 - \lambda)}{c^2 + \gamma - \lambda}\right)$$

అవుతుంది. ఈ బిందువు వద్ద స్పర్శతలము

$$\frac{\alpha x}{a^2 + t} + \frac{\beta y}{b^2 + t} + \frac{\gamma z}{c^2 + t} = 1, (t = \gamma - \lambda)$$

అవుతుంది. ఈ సమతలము ఒక పరామితి t (లేక γ) ని కలిగి ఉన్నది కావున దీని ఆవరణిక ఉత్పన్న తలము అవుతుంది.

సమతలమును $f(t) \equiv t^3 + At^2 + Bt + c = 0$ అనుకొనిన

$$f^1(t) \equiv 3t^2 + 2At + B = 0 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\Rightarrow 3f - tf^1 = At^2 + 2Bt + 3c = 0.$$

చివరి రెండు సమీకరణముల నుండి t ని తొలగించిన ఆవరణిక

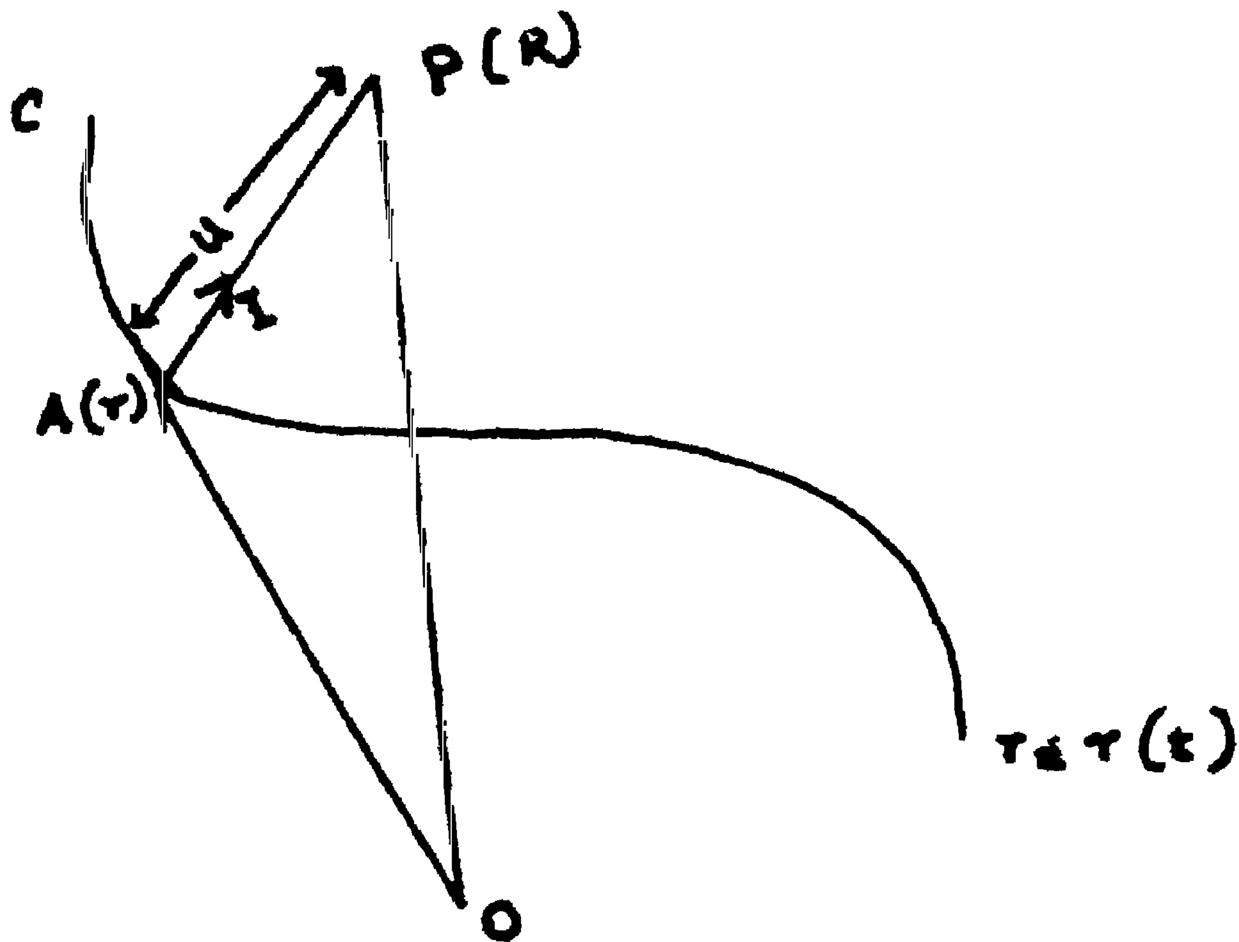
$$(9C - AB)^2 = 4\,(3B - A^2)\,(3AC - B^2)\;;$$

(A, B, C లు పైన సూచించిన రీతిలో) అవుతుంది.

3.11 స్క్యూ ఉపరితలములు (Scrolls) :

జనకరేఖలు ఖండించుకొనని రేఖాజన్య ఉపరితలములను స్క్యూ ఉపరితలములంటామని 3.7 లో క్లుప్తముగ చర్చించినాము.

ఒక రేఖా జన్య ఉపరితలము దానిపై కల వక్రము (నియత వక్రము - directrix లేక ఆధారవక్రము) మరియు ఉపరితలము, వక్రముల ఉమ్మడి బిందువుల వద్ద కల జనకరేఖల దిశచే పూర్తిగ నిర్ధారింపబడుతుంది.



పటము 3.7

ఉపరితలముపై $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ అను సమీకరణము కల వక్రము C, A దానిపై బిందువు $\mathbf{I} = \mathbf{I}(t)$ అనునది A ద్వారాపోవు జనక రేఖపై యూనిట్ సదిశ, ఉపరితలముపై బిందువు P స్థానసదిశ $\mathbf{R}$ అయిన $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{I}$ రేఖాజన్య ఉపరితలము అవుతుంది.

సూక్ష్య ఉపరితలమునకు C ఆధారవక్రము, $A_1(\mathbf{r}_0)$, $A_2(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0)$ ల ద్వారాపోవు సామీప్య జనకరేఖలు $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ అయిన ఈ జనకరేఖలు $\mathbf{g}, \mathbf{g} + d\mathbf{g}$ ల దిశలలో ఉన్నవనుకొనిన ఆ జనకరేఖలు $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{g}$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{g} + d\mathbf{g})$ అవుతాయి.

వీటిమధ్య అల్పతమ దూరము S.D. $= \dfrac{d\gamma \cdot (\mathbf{g} \wedge \mathbf{g} + d\mathbf{g})}{|\mathbf{g} \wedge d\mathbf{g}|} = \dfrac{[\mathbf{t}\mathbf{g}\mathbf{g}']}{|\mathbf{g} \wedge \mathbf{g}'|}\,\delta s$ అవుతుంది.

కావున దత్త ఉపరితలము (i) ఉత్పన్న తలము అగుటకు (ii) సూక్ష్య ఉపరితలము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $[\mathbf{t}\mathbf{g}\mathbf{g}'] = 0$ లేక $[\mathbf{t}\mathbf{g}\mathbf{g}'] \neq 0$ అగును.

ఉదా 29 : a, b, α, βలు పరామితి t యొక్క ప్రమేయములయిన సరళరేఖ $x = az + \alpha$. $y = bz + \beta$ జనకరేఖగ కల రేఖాజన్య ఉపరితలమును గురించి చర్చించుము.

$$L : \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = z \Rightarrow \mathbf{r} = (\alpha, \beta, o)\ ;\ \mathbf{g} = (a, b, 1),\ \mathbf{g}' = (a', b^2, 0)$$

ఈ రేఖాజన్య ఉపరితలమునకు

$$[\mathbf{t}\mathbf{g}\mathbf{g}'] = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ a & b & 1 \\ a' & b' & 0 \end{vmatrix} = a'\beta' - b'\alpha',$$

రేఖాజన్య ఉపరితలము ఈ రాశి శూన్యమయిన ఉత్పన్న తలము అవుతుంది. లేకున్న సూక్ష్య ఉపరితలము అవుతుంది.

ఉదా 30 : ఒక వక్రము యొక్క (i) స్పర్శరేఖ, (ii) ఉపాభిలంబరేఖ, (iii) ప్రధాన అభిలంబరేఖలు జనకరేఖలుగా కల రేఖాజన్య ఉపరితలముల గురించి చర్చించుము.

(i) $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{g} = \mathbf{t}$ కావున $[\mathbf{t}\mathbf{g}\mathbf{g}'] = 0 \Rightarrow$ ఉత్పన్నతలము

(ii) $\mathbf{g} = \mathbf{n}$ కావున $[\mathbf{tgg'}] = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, (\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t})] = \tau[\mathbf{tnb}] = \tau$

(iii) $\mathbf{g} = \mathbf{b}$ కావున $[\mathbf{tgg'})] \equiv \tau[\mathbf{tbn}] = \tau$.

చివరి రెండు సందర్భాలలోను రేఖాజన్య ఉపరితలము సూక్ష్మ్య ఉపరితలము అవుతుంది. $T = 0$ అనగా ఆధార వక్రము సమతలములో ఉన్నప్పుడే ఆ ఉపరితలము ఉత్పన్నతలము అవుతుంది.

3.12 రేఖాజన్య ఉపరితలమునకు స్పర్శతలము :

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ఉపరితలమునకు అభిలంబరేఖ $\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2$ కు సమాంతరము అవుతుందని చూసినాము. కావున $P(\mathbf{r})$ బిందువు వద్ద ఉపరితలమునకు గీయబడిన స్పర్శతల సమీకరణము $[(\mathbf{R} - \mathbf{r}), \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] = 0$ అవుతుంది. రేఖాజన్య ఉపరితలములకు $\mathbf{R} = \mathbf{r} + v\mathbf{g}$ అవుతుంది. పాదిక $_1$u తో పాక్షిక అవకలనమును, $_2$v తో పాక్షిక అవకలనమును సూచిస్తాయి. కావున $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + v\mathbf{g}_1, \mathbf{R}_2 = \mathbf{g}$ అవుతుంది.

$\Rightarrow$ స్పర్శతల సమీకరణము $[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 + v\mathbf{g}_1, \mathbf{g}] = 0$ అవుతుంది.

సూచన : రేఖాజన్య ఉపరితలముపై చలన బిందువు

$\xi = az + \alpha, \eta = bz + \beta, \zeta = z$, ($a, b, \alpha, \beta$ లు t ప్రమేయములు కావున ξ, η, ζలు t, zలు ప్రమేయములు)

అయిన $\mathbf{R} = (\xi, \eta, \zeta), \mathbf{r} = (az + \alpha, bz + \beta, z)$ అవుతాయి.

$$\Rightarrow \mathbf{R}_1 = (a'z + \alpha'), b'z + \beta', 0), \mathbf{R}_2 = (a, b, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 = \left(b'z + \beta' - (a'z + \alpha'), b(a'z + \alpha^1) - a(b'z + \beta')\right)$$

కావున $P(\mathbf{r})$ వద్ద రేఖాజన్య ఉపరితలమునకు స్పర్శతల సమీకరణము

$$\{\xi - (az + \alpha)\}(b'z + \beta') - \{\eta - (bz + \beta\}(a'z + \alpha') * (\zeta - z)$$

$\{b(a'z + \alpha') - a(b'z + \beta')\} = 0$ అవుతుంది. దీనినే

$\{\xi - (a\zeta + \alpha)\}(b'z + \beta') - \{\eta - (b\zeta + \beta)\}(a'z + \alpha') = 0$ గ కూడా వ్రాయగలము.

ఈ సమతలము $\xi = a\zeta + \alpha, \eta = b\zeta + \beta$ అను సమతలముల ఛేదన రేఖ అనగ (t, z) ద్వారాపోవు జనకరేఖ ద్వారాపోతుంది.

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0 \text{ లేక } \frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'} (= \lambda) \text{ అయిన}$$

స్పర్శతల సమీకరణము $(\xi - a\zeta - \alpha) - \lambda(\eta - b\zeta - \beta) = 0$ గ మారుతుంది. దీనిలో z పదములు లేవు.

$\Rightarrow$ **t** ఇవ్వబడిన (అనగ ఉత్పన్నతలము యొక్క ప్రత్యేక జనక రేఖకు) అన్ని బిందువుల వద్ద ఒకే స్పర్శతలము ఉంటుంది. $a'\beta' - b'\alpha' \neq 0$ అయిన స్క్యూ తలము యొక్క ప్రత్యేక జనక రేఖకు (t, zలు ఉన్నందున విభిన్న బిందువుల వద్ద విభిన్న స్పర్శ తలములుంటాయి.

సిద్ధాంతము :

(1) ఉత్పన్న తలము యొక్క స్పర్శతలము ఒకే పరామితి కలిగి ఉంటుంది.

(2) రేఖాజన్య ఉపరితలము ఉత్పన్న తలము అగుటకు ప్రత్యేక జనకరేఖపై అన్ని బిందువుల వద్ద ఒకే స్పర్శ తలము ఉంటుంది. (ఇంకొక నిరూపణము)

r(t) ఆధారవక్రముపై బిందువు, **g**(t) జనకరేఖ వెంబడి యూనిట్ సదిశ అయిన రేఖాజన్య ఉపరితలముపై బిందువు P(t, v) యొక్క స్థాన సదిశ $\mathbf{R} = \mathbf{r} + v\,\mathbf{g}$ అవుతుంది. దీని అభిలంబరేఖ $\mathbf{R}_t \wedge \mathbf{R}_v$ కి సమాంతరము

$$\Rightarrow \text{ ఈ అభిలంబరేఖ } (\mathbf{r}_t + v\mathbf{g}_t) \wedge \mathbf{g} \text{ కి సమాంతరము.}$$

ఒక ప్రత్యేక జనకరేఖకు t స్థిరరాశి అవుతుంది కావున ఈ జనకరేఖపై కల అన్ని బిందువులకు ఒకే స్పర్శతలము ఉండిన $(\mathbf{r}_t + v\mathbf{g}_t) \wedge \mathbf{g}$ అను సదిశ v పై ఆధారపడదు. అనగ స్పర్శతలము ఒకే పరామితిని కలిగి ఉంటుంది. —— (1)

$$\Rightarrow \mathbf{r}_t \wedge \mathbf{g} = 0 ; \mathbf{g}_t \wedge \mathbf{g} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_t = 0 \text{ లేక } \mathbf{r}_t = \lambda\mathbf{g} ; \mathbf{g}_t = 0 \text{ లేక } \mathbf{g}_t = \mu\mathbf{g}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}$ = స్థిరరాశి, g ఆధార వక్రపు స్పర్శరేఖ అవుతుంది ; **g** స్థిర దిశను కలిగి ఉంటుంది.

$\Rightarrow$ ఆధార వక్రము బిందువు, $\mathbf{R} = \mathbf{r} + v\,\mathbf{r}_t$; స్థూపాకార ఉపరితలము.

$\Rightarrow$ ఉపరితలము శంకువు, వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖలచే ఏర్పడు ఉపరితలము ;

పైన పేర్కొన్న అన్ని ఉపరితలములు ఉత్పన్న తలములే అవుతాయి. —— (2)

స్పర్శోపరితలము : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ అను వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖలు జనకరేఖలుగా కల ఉపరితలమును స్పర్శోపరితలము అంటాము.

దీని సమీకరణము $\mathbf{R}(s, u) = \mathbf{r}(s) + u\mathbf{t}(s)$ అవుతుంది.

[u - వాస్తవ పరామితి, $|u|$ స్పర్శబిందువు $P_0(s)$ నుండి $P(s, u)$ కు దూరము ; $P_0P = a^2\mathbf{t}$ అయిన $u > 0$; $P_0P = -a^2\mathbf{t}$ అయిన $u < 0$].

అంతరాళములోని ప్రతి వక్రము, తరగతి ≥ 2, వక్రత ≥ 0 కలిగిన దానికి అనురూపముగ మూడు రేఖాజన్య ఉపరితలములు – స్పర్శోపరితలము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{t}$,

ప్రధాన అభిలంబీయ ఉపరితలము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{n}$ మరియు ఉపాభిలంబీయ ఉపరితలము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{b}$ లు ఏర్పడుతాయి.

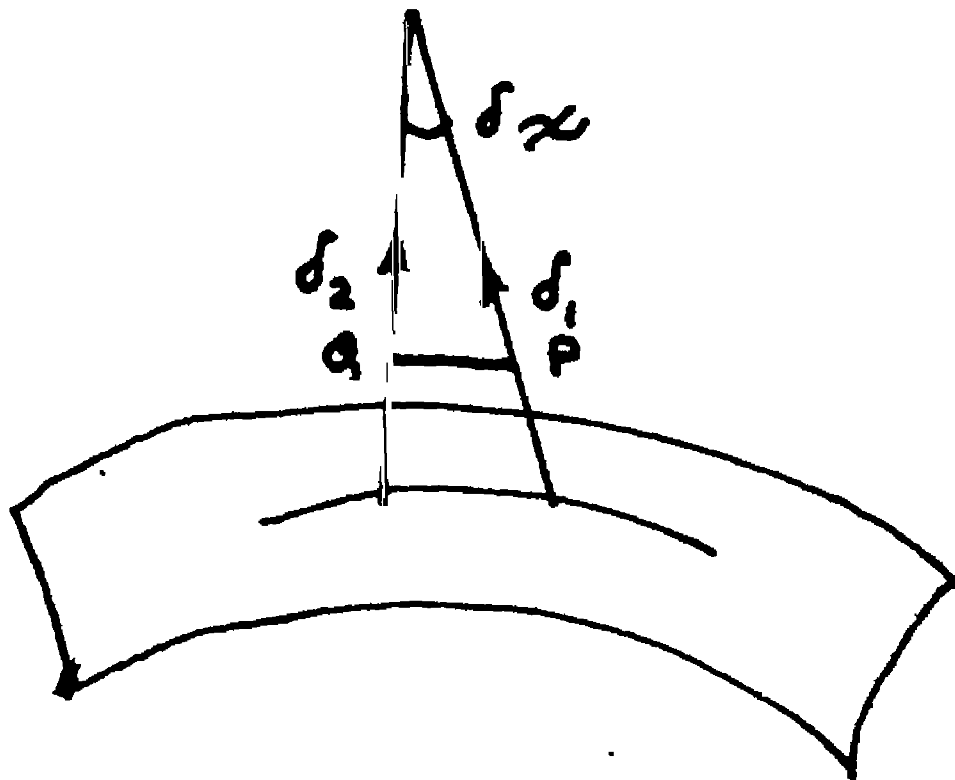
3.13 కొన్ని నిర్వచనములు :

1. **కేంద్రీయ బిందువు** : ఒక రేఖీయ ఉపరితలమునకు g_1, g_2 లు రెండు సామీప్య జనకరేఖలు, వాటి అల్పతమ దూరము g_1ను Pవద్ద ఖండించిన $g_2 \to g_1$ అయినప్పుడు $P \to C$ అవుతుంది. ఈ బిందువు C ని కేంద్రీయ బిందువు అంటాము.

అనగ ఒక జనకరేఖ యొక్క కేంద్రీయ బిందువు, ఆ జనకరేఖ దాని సమీప్య జనకరేఖల అల్పతమ దూరముతో జనకరేఖ ఏర్పరచు ఖండనబిందువు యొక్క అవధి రూపము అవుతుంది.

2. **Striction వక్రము (రేఖ)** : జనకరేఖల కేంద్రీయ బిందువుల బిందుపథమును Striction రేఖ అంటాము.

3. **విభాజనీయ పరామితి :** ఒక జనకరేఖ g_1 యొక్క విభాజనీయ పరామితి p ని రెండు సామీప్య జనకరేఖల అల్పతమ దూరము, వాటిమధ్య కోణముల నిష్పత్తికి అవధి $g_2 \to g_1$ గ నిర్వచిస్తాము. $p = \underset{g_2 \to g_1}{Lt} \frac{S.D.}{\delta\psi}$



పటము 3.8

రేఖీయ ఉపరితలము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{g}$ అయిన విభాజనీయ పరామితి

$$p(t) = \frac{[\mathbf{r}'\mathbf{g}\mathbf{g}']}{\mathbf{g}'^2}, \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$ అవుతుంది.

కేంద్రీయ బిందువు – మరికొంత వివరణ : జనకరేఖల మధ్య అల్పతమ దూరము యొక్క అవధి రూపము **m** అయిన **m** ఉపరితలములో ఉంటుంది.

$\Rightarrow \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0 \cdot \mathbf{g}_1$ సమీకరణము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{g}$ అయిన $\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} = 0$ అవుతుంది.

కావున $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{g} \wedge \mathbf{n}$ అవుతుంది.

$\mathbf{g}_2$ దిశ $\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$ అయిన $(\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}) \cdot \mathbf{m} = 0 \Rightarrow \mathbf{g}' \cdot \mathbf{m} = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \mathbf{g}' \cdot (\mathbf{g} \wedge \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{g}' \wedge \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = 0$

$\mathbf{g}_1$ సమీకరణము $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{g}$ నుండి $\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 = H\mathbf{n} = (\mathbf{r}' + u\mathbf{g}')) \wedge \mathbf{g}$

$$\Rightarrow (\mathbf{g}' \wedge \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{g} + u\,\mathbf{g}' \wedge \mathbf{g}) = 0 = (\mathbf{g}' \wedge \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{g}) + u(\mathbf{g}' \wedge \mathbf{g})^2$$

$$\Rightarrow (\mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{g}' \cdot \mathbf{g})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{g}) + u\left[(\mathbf{g}' \cdot \mathbf{g}')(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{g}' \cdot \mathbf{g})^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}' + u\mathbf{g}'^2 = 0 \ \ (\because \ \mathbf{g}' = 1, \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}' = 0)$$

ఈ సమీకరణము నుండి u కి ఏకైక విలువ ($\mathbf{g}'^2 \neq 0$ అయిన) వస్తుంది. u యొక్క ఈ విలువకు కేంద్రీయ బిందువు $\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{g}$ అవుతుంది.

ఉదా 31 : $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ఒక సూచ్య తలమును జనింపచేసిన జనక రేఖ యొక్క విభాజనీయ పరామితి కనుగొనండి.

ఈ సూచ్య తలమునకు రెండు సామీప్య జనకరేఖలు.

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \ ; \ \frac{x-(\alpha+d\alpha)}{l+dl} = \frac{y-(\beta+d\beta)}{m+dm} = \frac{z-(\gamma+d\gamma)}{n+dn}$$ లేక

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{n} \ ; \ \mathbf{r} = (\mathbf{a} + d\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{n} + d\mathbf{n})$ అవుతాయి.

వీటి అల్పతమ దూరము $S.D = \frac{[\mathbf{n}\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{a}]}{\mathbf{n} \wedge d\mathbf{n}}$ అవుతుంది.

$$|\mathbf{n} \cap d\mathbf{n}| = \sqrt{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n})^2} = \sqrt{d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}} = \sin d\psi$$

కావున విభాజనీయ పరామితి $= p = \frac{S \cdot D}{\sin d\psi} = \frac{[\mathbf{n}\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{a}]}{d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}}$ అవుతుంది.

కార్టీజియన్ నిరూపకములలో ఇది

$$-\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix} \times \frac{1}{(dt)^2 + (dm)^2 + (dn)^2}$$ అవుతుంది.

ఉదా 32 : పై సమస్యలో Striction వక్రము, జనకరేఖల ఖండన బిందువును (కేంద్రీయ బిందువును) కనుగొనండి.

రేఖాజన్య ఉపరితలము యొక్క రెండు సామీప్య జనకరేఖల అల్పతమ దూరము ఆ ఉపరితలమునకు జ్యా అవుతుంది. కావున $Q \to P$ అయిన అల్పతమ దూర రేఖ ఉపరితలమునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది. దీని వెంబడి సదిశ m అయిన

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} + \delta\mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \mathbf{m} \cdot \delta\mathbf{n} = 0 \text{ లేక } \mathbf{m} = p(\mathbf{n} \wedge d\mathbf{n})$$

రూపములో కాని $m = q(\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'))$ రూపములో కాని ఉంటుంది. λ యొక్క ఒక విలువకు దత్తరేఖపై కేంద్రీయ బిందువు $a + \lambda\mathbf{n}$ అయిన ఈ బిందువు వద్ద సూత్ర్య ఉపరితలమునకు స్పర్శతలము $[r - (a + \lambda\mathbf{n}), \mathbf{n}, (a' + \lambda\mathbf{n})] = 0$ అవుతుంది. కావున స్పర్శతలమునకు (లేక అల్పతమ దూరరేఖ యొక్క అవధి రూపమునకు) అభిలంబరేఖ $\mathbf{n} \wedge (a' + \lambda\mathbf{n}')$ అవుతుంది

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \wedge a' + \lambda\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') = 0 \text{ లేక}$$

$$q(\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \cdot (\mathbf{n} \wedge a' + \lambda\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') = 0 \Rightarrow (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}' \cdot a') - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')(\mathbf{n} \cdot a')$$

$$+ \lambda \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}') - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2\right] = 0 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(\mathbf{n}' \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \wedge a')}{(\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}')^2} \text{ లేక } \lambda = \frac{(\mathbf{n}' \cdot a')}{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}'} \text{ అవుతుంది.}$$

కావున కేంద్రీయ బిందువు ఈ జనక రేఖకు $a - \dfrac{\mathbf{n}' \cdot a'}{\mathbf{n}'^2}$ అవుతుంది.

కార్టీజియన్ నిరూపకములలో ఇది $(\alpha + \lambda l, \beta + \lambda\mathbf{m}, \gamma + \lambda\mathbf{n})$ అవుతుంది.

ఇచ్చట $\lambda = \dfrac{\Sigma\,(\mathbf{mn}' - \mathbf{m}'\mathbf{n})(\mathbf{n}\beta' - \mathbf{m}\gamma)}{\Sigma\,(\mathbf{mn}' - \mathbf{m}'\mathbf{n})^2}$ ఉంటుంది.

ఉదా 33 : $x = az + \alpha,\ y = bz + \beta$ (a, b, α, βలు t ప్రమేయము అయిన) సూత్ర్య తలము యొక్క జనకరేఖ అయిన దీని విభాజనీయ పరామితి కనుగొనండి.

$$L\ ;\ \frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = z \Rightarrow \mathbf{r} = (\alpha, \beta, 0),\ \mathbf{g} = (a, b, 1)$$

రెండు సామీప్య జనకరేఖల మధ్యకోణము $\delta\psi$ అయిన

$$\sin\delta\psi = \frac{|\mathbf{g} \wedge (\mathbf{g} + \delta\mathbf{g})|}{|\mathbf{g}|\,|\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}|} \text{ లేక } \frac{|\mathbf{g} \wedge \mathbf{g}'|\ dt}{|\mathbf{g}|\,|\mathbf{g} + \delta\mathbf{g}|}\ ;$$

అల్పతమ దూరము S.D. = $\dfrac{[gdgdr]}{|g \wedge dg|}$ లేక $\dfrac{[r' \, gg']}{|g \wedge g^1|} dt$

విభాజనీయ పరామితి

$$p = \frac{S.D}{\psi} = \frac{[r' \, gg']}{|g \wedge g'|^2} \cdot |g|^2 = \frac{(a'\beta' - b'\alpha')(1 + a^2 + b^2)}{a^{12} + b^{12} + (ab' - a'b)^2}$$ అవుతుంది.

సూచన : ఉదా 31 ని ఈ పద్ధతిలో సాధిస్తే

$r = (\alpha, \beta, \gamma)$, $g = (l, m, n)$ అవుతాయి కావున

$$p = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ l & m & n \end{vmatrix} (l^1 + m^2 + n^2)}{(mn' - m'n)^2 + (nl' - n'l)^2 + (lm' - l'm)^2}$$ అవుతుంది.

$$= \frac{\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix}}{(mdn - ndm)^2 + (ndl - ldn)^2 + (ldm - mdl)^2} \quad (l^2 + m^2 + n^2 = 1)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix}}{(1 - n^2)(dn)^2 + (1 - m^2)(dm)^2 + (1 - l^2)(dl)^2 - 2(lmdldm + mndmdn + nldndl)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix}}{(dl)^2 + (dm)^2 + (dn)^2 - (ldl + mdm + ndn)^2}$$

$(l, m, n) \cdot (dl, dm, dn) = 0$ అవుతుంది కావున

$$p = \frac{\begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix}}{(dl)^2 + (dm)^2 + (dn)^2}$$ అవుతుంది.

ఉదా 34 : ఉదా. 33 లో Striction వక్రము, జనకరేఖల ఖండన బిందువు z నిరూపకము కనుగొనండి.

$r = (\alpha, \beta, 0)$; $(l, m, n) = (a, b, 1)$ కావున ఉదా. 32 నుండి Striction వక్రము, జనకరేఖల ఖండన బిందువు యొక్క z నిరూపకము λ లేక

$$\frac{-b'\beta' - a'\alpha' + (ab' - a'b)(b\alpha' - a\beta')}{b'^2 + a'^2 + (ab' - a'b)^2} \text{ లేక}$$

$$\frac{-a'\alpha'(1 + b^2) - b'\beta'(1 + a^2) + ab(b'\alpha' + a'\beta')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - a'b)^2} \text{ అవుతుంది.}$$

ఉదా 35 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ అను ఉపరితలమునకు Striction వక్రము కనుగొనండి.

ఈ ఉపరితలమునకు జనకరేఖ $\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - a\sin\theta}{-a\cos\theta} = \frac{z}{c}$ అవుతుంది.

$$r = (\alpha, \beta, \gamma) = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0), g = (l, m, n) = (a\sin\theta, -a\cos\theta, c)$$

$$\Rightarrow \alpha' = -a\sin\theta, \beta' = a\cos\theta, \gamma' = \theta ; l' = a\cos\theta, m' = a\sin\theta, n' = 0$$

కావున $\lambda = \frac{\Sigma(mn' - m'n)(n\beta' - m\gamma')}{\Sigma(mn' - m'n)^2} = 0$ అవుతుంది.

కావున కేంద్రీయ బిందువు $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = 0$ మరియు దీని బిందుపథము ఈ భ్రమణోపరితలము యొక్క ప్రధాన వృత్త ఛేదనము అవుతుంది.

ఉదా 36 : ఒక వక్రము దాని ఉపాభిలంబ రేఖలతో ఏర్పడు సూర్వ్య తలము యొక్క Striction వక్రము అవుతుందని చూపండి.

అంతరాళములోని ఒక వక్రము యొక్క రెండు సామీప్య ఉపాభి లంబరేఖలు

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{b} ; \mathbf{R} = (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) + \mu(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$$

అయిన వీటి మధ్య అల్పతమ దూరరేఖ

$$[\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{b}, (\mathbf{b} \wedge \delta\mathbf{b})] = 0 \text{ (i)}, [\mathbf{R} - (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}), \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}, (\mathbf{b} \wedge \delta\mathbf{b})] = 0 \text{ (ii)}$$

ల ఛేదన రేఖ అవుతుంది.

ఇప్పుడు జనకరేఖ $R = r + \lambda b$, సమతలము (ii) ల ఖండన బిందువు

$(\lambda \mathbf{b} - \delta \mathbf{r}, \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}, \mathbf{b} \wedge \delta \mathbf{b}] = 0$ అవుతుంది.

$\mathbf{b} \wedge \delta \mathbf{b} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{b}')\, ds$ లేక Ttds అవుతుంది.

కావున ఖండన బిందువు

$\lambda[\mathbf{b}\, \delta \mathbf{b}\, \mathbf{t}] = [\delta \mathbf{r} + \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}, \mathbf{t}] = [\mathbf{t}, \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}, \mathbf{t}]\, ds = 0$ గమూరుతుంది.

$\Rightarrow \lambda[\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{t}]\, ds = 0.$ $[\mathbf{bnt}] \neq 0$ కావున $\lambda = 0$

లేక Striction వక్రము $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ అనగ దత్త వక్రము అవుతుంది.

సూచన :

(1) ఈ సూర్ఖ్య ఉపరితలమునకు విభాజనీయ పరామితి

$$p(t) = \frac{[\mathbf{r}^1 \mathbf{g} \mathbf{g}^1]}{\mathbf{g}'^2}.$$
$$= \frac{[\mathbf{tbn}](-\tau)}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} = \sigma \text{ అవుతుంది.}$$

(2) ప్రధాన అభిలంబరేఖలు జనక రేఖలుగా కల సూర్ఖ్య తలమునకు విభాజనీయ పరామితి

$\frac{[\mathbf{t}, \mathbf{n}, (\tau \mathbf{b} - k\mathbf{t})]}{\tau^2 + k^2}$ లేక $\frac{\tau}{\tau^2 + k^2}$ అవుతుంది.

అధ్యాయము – 3 పై సమస్యలు

1 $z = x^2 + y^2$ ఉపరితలమునకు $(1, -1, 2)$ వద్ద స్పర్శతలము $2x - 2y - z = 2$ అవుతుంది.

2. $a(yz + zx + xy) = xyz$ అను ఉపరితలమునకు మూలబిందువు కేంద్రముగ కల గోళమునకు కల ఉమ్మడి బిందువుల వద్ద ఉపరితలమునకు గీసిన స్పర్శ తలము నిరూపక అక్షములపై చేయు అంతర్ఖండముల మొత్తము స్థిరరాశి అని చూపండి.

3 $x^2y + 2xz = 4$ ఉపరితలమునకు $(2, -2, 3)$ వద్ద $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ యూనిట్ అభిలంబరేఖ అవుతుందని చూపండి.

4. $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ నకు $(1, -1, 2)$ వద్ద $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ యూనిట్ అభిలంబరేఖ అవుతుంది.

5. $xyz = 4$ ఉపరితలమునకు (x_1, y_1, z_1) వద్ద స్పర్శరేఖ

$$\frac{(x - x_1)}{x_1} + \frac{(y - y_1)}{y_1} + \frac{(z - z_1)}{z_1} = 0$$ అవుతుందని చూపండి.

6. $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ అను ఉపరితలమునకు $(1, -1, 2)$ వద్ద స్పర్శతలము $7x - 3y + 8z$ అవుతుందని చూపండి.

ఆవరణిక – ప్రతిగమన అంచు :

7. $\frac{x}{a + u} + \frac{y}{b + u} + \frac{z}{c + u} = 1$ అను సమతలముల వ్యవస్థకు, u - పరామితి అయిన, ప్రతిగమన అంచు కనుగొనుము.

8. $c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తజముల ఆవరణిక, ప్రతిగమన అంచు, c- పరామితి అయిన ప్పుడు, కనుగొనండి.

9. $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ అయినప్పుడు $lx + my + nz = 0$ సమతలముల ఆవరణిక $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ అవుతుందని చూపండి.

10. $x^2 + y^2 = 4a(z - a)$ అను పరావలయజముల ఆవరణిక $x^2 + y^2 - z^2$ అను శంకువు అవుతుందని చూపండి.

11. ఒక వక్రముపై కేంద్రము కలిగి స్థిర బిందువు ద్వారాపోవు గోళముల ఆవరణిక, ప్రతిగమన అంచు కనుగొనండి.

12. అంతరాళములోని ఒక వక్రము యొక్క సంస్పర్శక గోళ సముదాయము యొక్క లాక్షణిక వక్రములు వక్రతా వృత్తములని, ప్రతిగమన వక్రము అదే వక్రము అవుతుందని చూపండి.

ఉత్పన్న తలము – స్థూప్యా ఉపరితలము :

13. ఈ క్రింది వక్రములు ప్రతిగమన అంచులుగా కల ఉత్పన్న తలములు కనుగొనండి.

(i) $\left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$, (ii) $(a \cos\theta, a \sin\theta, c\theta)$

14. $y = tx - t^3$, $z = t^3y - t^6$ అను ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన వక్రము $y - 4z = 0$, $x^3 - 2yz = 0$ లచే సూచించబడుతుందని నిరూపించండి.

15. $F(x, y, z) = 0$ ఉత్పన్న తలమును సూచించిన

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix} = 0$$ అవుతుందని చూపండి.

16. (i) (u, u^2, u^3), (ii) $(a \cos \theta, a \sin \theta, c\theta)$ల సంస్పర్శక ఉత్పన్న తలముల వ్రాయండి.

17. (i) $z = 0$, $y^2 = 4ax$; $z = c$, $x^2 = 4ay$ల ద్వారాపోవు ఉత్పన్న తలము, (ii) దాని ప్రతిగమన అంచు కనుగొనండి.

18. ఒక వక్రముపై బిందువు rకు అనురూప ప్రతిగమన అంచు

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{k(\tau\mathbf{t} + k\mathbf{b})}{k'\tau - k\tau'}$$ అని మనకు తెలియును. ఈ సమీకరణము

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \frac{k^2(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}'' \ \mathbf{r}''' \ \mathbf{r}'''']}$$ అవుతుందని చూపండి.

19. ఒక ఉత్పన్న తలము $\lambda^2x^2 + y^2 = \lambda^2$, $z = c$; $x^2 + y^2 = 1$, $z = -c$ అను వక్రముల ద్వారా గీయబడిన $z = 0$తో ఆ ఉపరితలము యొక్క ఛేదనము

$$2y = \cos\alpha + \lambda \cos\beta \ ; \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \lambda\right)$$ అవుతుందని చూపండి.

20. ఒక ఉత్పన్న తలము (i) రెండు దత్త తలములను ఆవరించును, (ii) ఒక వక్రము ద్వారా పోవుచు దత్త తలమును స్పర్శించును, (iii) రెండు దత్త వక్రముల ద్వారా పోవునని చూపండి.

21. $z = 0, 4a^3y^3 = b^2c^2x^2; y = 0, 4a^3z^3 = 6c^4x$ల ద్వారాపోవు ఉత్పన్న తలము $(a^2yz - bc^2x)^2 = 4a^2 (bzx + ay^2)(cy^2 + az^2)$ అనియు దాని ప్రతిగమన అంచు $az^2 + c^2y = 0, a^2yz - bc^2x = 0$ల ఛేదన వక్రము అనియు చూపండి.

22. శాంకవములు $xy = 1, z = 0; y^2 = 4x, z = 1$లను కలిగి ఉన్న ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు $8xy = 9(z - 1)^2$ శంకువుపై ఉంటుందని చూపండి.

23. $x^2 + y^2 = a^2, z = 0; y^2 + z^2 = b^2, x = 0$

అను వృత్తములను కలిగి ఉండు ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు

$\left(\frac{x}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{z}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ స్థూపముపై ఉంటుంది.

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ అను దీర్ఘవృత్తజము $x = 0, y^2 + z^2 = a^2$ అను ప్రకాశవంతమయిన వలయముచే పరివృత్తమయిన దాని నీడ xy - తలములో

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = \frac{z^2}{a^2 - c^2}$$

చే గుర్తించబడునని చూపండి.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ అను వక్రమునకు గీసిన స్పర్శరేఖలచే ఏర్పడు ఉత్పన్నతలము యొక్క ఛేదనము $z = 0$ తలములో

$\frac{a^2 (a^2 + c^2)}{x^2} + \frac{b^2 (b^2 + c^2)}{y^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{r^2}$ అవుతుందని చూపండి.

26. (i) $y = tx - t^3, z = t^3y - t^6$ అను సరళరేఖలతో ఉత్పన్నతలము,

(ii) $x = 2t^2z + 2t^2z + 2t(1 - 3t^4), y = -2tz + t^2(3 + 4t^2)$లతో సూక్ష్మ తలము ఏర్పడులేదని చూపండి.

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$లు ఏకనాభీయ శాంకవజములయిన వీటి ఛేదన వక్రము వెంబడి మొదటి శాంకవజమును ఆవరించు ఉత్పన్న తలము యొక్క ప్రతిగమన అంచు

$$\frac{x^{2/3} A^{2/3} (b^2 - c^2)^{2/3}}{a^{2/3}} + \frac{y^{2/3} B^{2/3} (c^2 - a^2)^{2/3}}{b^{2/3}} + \frac{z^{2/3} C^{2/3} (a^2 - b^2)^{2/3}}{c^{2/3}} = 0$$

అను శంకువుపై ఉంటుందని చూపండి.

28. ఒక ఉత్పన్న తలము $x = 0, y^2 = (a - b)(2z - a); y = 0, x^2 = (a - b)(2z - b)$ అను వక్రముల ద్వారాపోయిన దాని ప్రతిగమన అంచు $x^{2/3} - y^{2/3} + (a - b)^{2/3} = 0$ అను స్థూపముపై ఉంటుందని చూపండి.

29. ఒక ఉత్పన్న తలము

$z = 0, x = 2at^2, y = 2at; x = 0, y = -3at^2, z = 4at^3$

అను వక్రముల ద్వారా పోయిన దాని ప్రతిగమన అంచు

$y^2 + 6ax = 0, 64xy = 9z^2$ పై ఉంటుందని చూపండి.

30. $x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{C^2} = 1$

ల ఆవరించు ఉత్పన్న తలము zx తలమును

$\frac{x^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{b^2 - c^2}$ లో ఖండించునని చూపండి.

31. $\cos\theta + y \sin\theta = a, x \sin\theta - y \cos\theta = \frac{a(c\theta - z)}{c}$ ల నుండి θ ను తొలగించిన ఉత్పన్న తలము వస్తుందని చూపి, దాని ప్రతిగమన అంచు సమీకరణము వ్రాయండి.

32. a, b, c, p లు పరామితి t యొక్క ప్రమేయములయిన $ax + by + cz = p$ యొక్క ప్రతిగమన అంచునకు ఈ సమతలము సంస్పర్శక తలమవుతుందని చూపి, ప్రతిగమన అంచుకు వక్రత, వివోటనములు $\frac{D(a'^2 + b'^2 + c'^2)^{-1}}{\Delta^3}$ మరియు $\frac{\Delta^2}{D}$ అవుతాయని చూపండి.

$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ మరియు $D = \begin{vmatrix} p & p' & p'' & p''' \\ a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \end{vmatrix}$

అవి ఇవ్వబడినవి.

33. $z = 0, x^2 + y^2 = 4a^2; x = 0, y^2 = 4a(x + a)$ అను వక్రముల ద్వారా రెండు శంకువులు పోవుననియు వాటి శీర్షములు $(2a, 0, -2a), (-2a, 0, -2a)$ అని చూపండి.

34. ఒక వక్రము యొక్క ధృవీయ ఉత్పన్న తలము ఆ వక్రము యొక్క ప్రతి కేంద్రమునకు చాపకలనీయ ఉత్పన్న తలము అవుతుందని చూపండి.

ద్విపరామితీయ ఉపరితలములు :

35. $\frac{x}{a}\cos\theta\sin\phi + \frac{y}{b}\sin\theta\sin\phi + \frac{z}{c}\cos\phi = 1$ (θ, ϕ లు పరామితులయిన) యొక్క ఆవరణిక $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ అవుతుందని చూపండి.

36. నిరూపకాక్షములతో $\frac{k^3}{6}$ ఘన పరిమాణపు చతుర్ముఖి (tetrahedron)ను ఏర్పరచు సమతలము యొక్క ఆవరణిక $27xyz = k^3$ అని చూపండి.

37. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ శంకువు యొక్క జనకరేఖల ద్వారా గీయబడిన అభిలంబ తలముల ఆవరణిక

$a^{1/3}(b-c)^{2/3}x^{2/3} + b^{1/3}(c-a)^{2/3}y^{2/3} + c^{1/3}(a-b)^{2/3}z^{2/3} = 0$ అవుతుంది.

38. నిరూపకాక్షములపై ఏర్పడు అంతర్ఖండముల వర్గముల మొత్తము స్థిరముగా కల సమతలముల ఆవరణిక $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = c^{2/3}$ అని చూపండి.

39. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ యొక్క స్పర్శతలము నిరూపకాక్షములను A, B, Cలలో ఖండించిన O, A, B, Cల ద్వారా పోవు గోళము యొక్క ఆవరణిక

$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} + (cz)^{2/3} = (x^2 + y^2 + z^2)^{2/3}$ అని చూపండి.

40. x - అక్షముపై స్థిరబిందువు A, yz - తలములోని చలన బిందువు Pకు కలుపబడినది. P ద్వారా APకి లంబముగ ఉండు సమతలముల ఆవరణిక కనుగొనండి.

41. Z - అక్షముపై స్థిరబిందువు A అయిన A ద్వారాపోవు ఒక సమతలము xy - సమతలమును BCలో ఖండించిన BC ద్వారాపోవుచు ABC తలమునకు లంబముగా ఉండు సమతలము ఆవరణిక కనుగొనండి.

42. n దత్త బిందువుల నుండి ఒక సమతలమునకు కల దూరముల వర్గముల మొత్తము స్థిరరాశి అయిన ఆ సమతలము యొక్క ఆవరణిక కేంద్రీయ శాంకవజము అని చూపండి.

43. ఒక వృత్తముపై కల స్థిరబిందువు నుండి జ్యాలు గీయబడిన, ఈ జ్యాలు వ్యాసములుగా కల గోళముల ఆవరణిక కనుగొనండి

44. స్థిరబిందువు O నుండి పరస్పర లంబరేఖలు (3) గీయబడినవి. ఇవి దత్త గోళమును P, Q, Rల వద్ద ఖండించిన సమతలము PQR యొక్క ఆవరణిక కనుగొనండి.

45. S_1, S_2లు స్థిరగోళములు, గోళము S_3 యొక్క కేంద్రము S_1 పై ఉండిన S_2, S_3ల మూల తలము (Radical plane) ఒక శాంకవజమును ఆవరించునని చూపండి.

46. స్థిర బిందువు ద్వారాపోవు సమతలములు దీర్ఘ వృత్తజముతో స్థిరవైశాల్యము కల దీర్ఘ వృత్తముల నేర్పరచిన ఆ సమతలము ఆవరణిక కనుగొనండి.

47. ఒక దీర్ఘ వృత్తజము యొక్క సంయుగ్మ వ్యాసములు దీర్ఘవృత్తజము యొక్క కేంద్రము కేంద్రముగా కల స్థిర గోళమును P,Q,Rలలో ఖండించిన సమతలము PQR ఆవరణిక కనుగొనండి.

48. శాంకవజము $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$ పై బిందువు P నుండి నిరూపక తలములపై లంబములు PL, PM, PN గీయబడిన సమతలము LMN యొక్క ఆవరిణక $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} + (cz)^{2/3} = 2^{2/3}$ అని చూపండి.

49. నిరూపకాక్షములను స్పర్శించు గోళము దృష్ట్యా ఒక బిందువు యొక్క ధృవతలముల ఆవరణిక కనుగొనండి.

కేంద్రీయ బిందువు – స్ట్రిక్షన్ (Striction) వక్రము – విభాజనీయ పరామితి :

50. ఒక స్కూ తలము యొక్క జనకరేఖకు గీయబడిన అభిలంబ రేఖలతో ఏర్పడు ఉపరితలము కనుగొనండి.

51. [v cosu, v sinu, f(u)]నకు విభాజనీయ పరామితి, Striction వక్రము కనుగొనండి.

52. అంతరాళములోని ఒక వక్రము యొక్క ప్రధాన అభిలంబరేఖలతో ఏర్పడు ఉపరితలము యొక్క స్ట్రిక్షన్ వక్రము అభిలంబమును వక్రము నుండి $\frac{p\sigma^2}{p^2+\sigma^2}$ దూరములో ఖండిస్తుంది అనియు ; అభిలంబరేఖపై P, Qల వద్ద ఉపరితలమునకు గీయబడిన స్పర్శ తలములు పరస్పరము లంబముగా ఉండిన, అభిలంబరేఖ, స్ట్రిక్షన్ వక్రముల ఖ బిందువు C అయిన $CP \cdot CQ = \frac{-p^4\sigma^2}{(p^2+\sigma^2)^2}$ అవుతుందని చూపండి.

53. τ విమోటనము కల వక్రమును గీసిన ఉపాభి లంబరేఖలతో ఏర్పడు స్కూ ఉపరితల జనక రేఖ యొక్క విభాజన పరామితి అనురూప బిందువద్ద σ అవుతుందని చూపండి.

54. ఒక స్కూ తలము యొక్క జనకరేఖ Striction వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ, ప్రధాన అభిలంబరేఖలతో $\cos^{-1}\lambda$, $\cos^{-1}\mu$ కోణములు చేసిన $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\mu}{p}$, (p స్ట్రిక్షన్ వక్రము యొక్క వక్రతా వ్యాసార్ధము) అని చూపండి.

55. $x + yt = 3t(1+t^2)$, $y + 2zt = t^3(3+4t^2)$ జనకరేఖగా కల స్కూ ఉపరితలమునకు ఈ జనక రేఖయొక్క విభాజనీయ పరామితి $\frac{3}{2}(1+2t^2)^2$ అనియు Striction వక్రము $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ అనియు చూపండి.

56. భ్రమణోపరితలము అతి పరావలజమయిన (i) Striction వక్రము కేంద్రీయ వృత్తము అవుతుందని, (ii) జనక రేఖలు దానిని స్థిరకోణములో ఖండించుతాయని, (iii) విభాజనీయ పరామితి స్థిరరాశి అని చూపండి

57. $\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$ ని $x\sin\theta = y\cos\theta$, $z = c\theta$ అను జనకరేఖల వెంబడి స్పర్శించు పరావలయజము $c(x\sin\theta - y\cos\theta) + (z - c\theta)(x\cos\theta + y\sin\theta) = 0$ అవుతుందని, ఏ జనకరేఖ కయిన విభాజనీయ పరామితి c అని, ఈ ఉపరితలము యొక్క Striction వక్రము z అక్షము అవుతుందని చూపండి.

58. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$కు స్ట్రిక్షన్ వక్రము కనుగొనండి.

59. $\frac{x - a\cos\theta}{\cos\theta \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{y - a\sin\theta}{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{z}{\sin\frac{\theta}{2}}$ జనకరేఖగా కల స్క్యూ ఉపరితలమునకు Striction వక్రము $2y + z = 0$ సమతలములో $\left(\frac{-2a}{5}, 0, 0\right)$ కేంద్రము; $2a, \frac{6a}{5}$ దీర్ఘాక్షము హ్రస్వాక్షముగా కల దీర్ఘవృత్తము అవుతుందని చూపండి.

60. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ యొక్క జనకరేఖ $\frac{x - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c}$ వెంబడి ప్రధాన దీర్ఘవృత్త ఛేదనము నుండి స్ట్రిక్షన్ వక్రమునకు కల దూరము

$$\frac{c^2(a^2 - b)^2 \sin\theta\cos\theta\,(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2)^{1/2}}{b^2c^2\sin^2\theta + c^2a^2\cos^2\theta + a^2b^2}$$ అవుతుందని చూపండి.

61. $z(x^2 + y^2) = 2mxy$కు $x\sin\theta = y\cos\theta$ సమతలములో జనకరేఖ యొక్క విభాజనీయ పరామితి $2m\cos 2\theta$ అని చూపండి ; కేంద్రీయ బిందువు కనుగొనండి.

63. $z = 4c^2x$ అను ఉపరితలమును $x = z, y = 2c$ అను జనకరేఖ వెంబడి స్పర్శించు శాంకవజము $y(x + 3z) = 2c(3x + z)$ అనియు, జనకరేఖ బిందువుల వద్ద ఉపరితలమునకు గీయబడిన అభిలంబరేఖలు $z^2 - x^2 = 4c(y - 2c)$ అను పరావలయముపై ఉంటాయని చూపండి.

64. ఒక సరళరేఖ ఒక ట్విస్టెడ్ వక్రముతో స్థిరకోణము చేయుచు దాని చాపకలనీయ తలములో ఉండిన ఈ సరళరేఖ జనక రేఖగా కల ఉపరితలమునకు స్ట్రిక్షన్ వక్రము దత్తవక్రము అవుతుందని చూపండి.

64. రెండు స్క్యూ తలములకు ఒక ఉమ్మడి జనకరేఖ ఉండి (i) ఆ జనకరేఖ వెంబడి (3) బిందువులలో అవి స్పర్శించినన ఆ జనకరేఖ యొక్క అన్ని బిందువుల వద్ద అవి స్పర్శించుననియు ఆ ఉపరితలముల దృష్ట్యా జనకరేఖ యొక్క కేంద్రీయ బిందువు, విభాజనీయ పరామితి ఒకటే ఉంటాయని చూపండి.

4.

ప్రథమ మౌలిక రూపము దాని యొక్క జ్యామితీయ వివరణ

4.1 ఉపరితల వక్రాలు :

u మరియు v ల మధ్య ఉండే సంబంధము ద్వారా తలము మీది వక్రమును ఏకైకంగా నిశ్చయించవచ్చును. ఉదాహరణకు u, v మరియు పరామితి c ల క్రమ ప్రమేయము f (u, v, c) అయినప్పుడు, f (u, v, c) = 0 తలము మీది వక్రములను నిశ్చయించును. C యొక్క ప్రతి విలువకు ఈ సమీకరణము తలము మీద ఒక ప్రత్యేక వక్రమును నిశ్చయిస్తుంది. C వివిధ విలువలకు ఏర్పడే వక్రాల సరణిని వక్ర కుటుంబం అంటాము.

ఏకాంతరంగా u మరియు v లు ఒక పరామితి t మీద ఆధార పడినప్పుడు, ఆ సంబంధాలు తలము మీద ఒక వక్రాన్ని నిశ్చయిస్తాయి. అటువంటి వక్రమునకు $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ సమీకరణమవుతుంది.

తలము S మీది వక్రముల సమితి ఒక వాస్తవ పరామితి t మీద ఆధారపడినప్పుడు ఆ వక్రముల సమితిని S మీద ఒక - పరామితి వక్రముల కుటుంబమని అంటాము.

C_1 మరియు C_2 లు తలము S మీద రెండు ఏక-పరామితి సరళ వక్రముల కుటుంబా అనుకుందాం. S మీద ప్రతిబిందువు P ద్వారా C_1 మరియు C_2 ఒక్కొక్క వక్రము వెళుతున్నాయనుకుందాం C_1, C_2 ల వక్రములకు P వద్ద విభిన్న దిశలుంటే C_1 మరియు C_2 లు వక్రముల వల (net) ని రూపొందిస్తాయని అంటాము.

4.2 పరామితీయ వక్రములు :

తలము $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ మీద u = స్థిరము, v = స్థిరముగా ఉండే వక్రములను పరామితీయ వక్రములు లేదా నిరూపక వక్రములని అంటాం. ప్రత్యేకంగా v = స్థిరము = a

అయినప్పుడు, $\vec{r} = \vec{r}\,(u, a)$ యొక్క జాడ పరామితీయ వక్రము. దీన్ని u = వక్రమని పిలుస్తాము. దీనికి u పరామితిగా వ్యవహరిస్తుంది. దీని స్పర్శరేఖ సదిశ $\vec{r}_1$ కి సమాంతరముగా ఉంటుంది. అలాగే, u = స్థిరము = b అయినప్పుడు $\vec{r} = \vec{r}\,(b, v)$ యొక్క జాడ పరామితీయ వక్రము. దీనిని v – వక్రము అని అంటాం. దీనికి v – పరామితి దీని స్పర్శరేఖ సదిశ $\vec{r}_2$ కి సమాంతరంగా ఉంటుంది.

తలంపైగల ఏదైనా బిందువు వద్ద

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq 0 \, (\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \neq 0)$$

అయితే, ఆ బిందువు సాధారణ బిందువు అవుతుంది. అంటే $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు పరస్పరం స్వాతంత్ర్యాలు అవుతాయి. తలంపై గీసిన వక్రము యొక్క స్పర్శరేఖ

$$d\vec{r} = \vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv$$

అనే సదిశ దిశలో ఉంటుంది. $d\vec{r}$ యొక్క దిశ $\frac{dv}{du}$ నిష్పత్తి పైననే ఆధార పడుతుంది. ఈ సదిశ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు గల సమతలంలో ఉంటుంది. అంటే $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ ఉపరితలానికి లంబంగా ఉంటుంది. కనక ఏదైనా బిందువు వద్ద యూనిట్ అభిలంబ సదిశ

$$\vec{N} = \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}, \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq 0$$

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$ అయితే ఉపరితలం వక్రంగా విశీర్ణము (degenerate) అవుతుంది.

ఎందుకంటే ప్రాథమిక స్థానభ్రంశం $d\vec{r}$ కి దిశ $\vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv$. మరియు $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ అయినప్పుడు $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు సమాంతరాలు. ఇంకా du, dv లు ఏమైనప్పటికీ $d\vec{r}$ ఒకే దిశను కలిగి వుంటుంది. దీని నుండి తలం వక్రంగా విశీర్ణము చెందుతుంది అని వస్తుంది.

తలంమీది ప్రతి బిందువు నుంచి ప్రతి పరామితి కుటుంబానికి చెందిన ఒకే ఒక పరామితి వక్రము పోతుంది.

P బిందువు (u_0, v_0) అనుకోండి. అంటే u_0, v_0 లు ఏకైకంగా బిందువు P వలన నిర్ణయించబడతాయి. అంటే $u = u_0, v = v_0$ అనే రెండు పరామితి వక్రాలు మాత్రమే P ద్వారా పోతాయి. కనక ఈ వక్రాలు ఉన్న తలానికి, (u_0, v_0) లు చెందినట్లయితే, ఒకే వ్యవస్థకు చెందిన రెండు పరామితి వక్రాలు ఖండించుకోవని వస్తుంది. మరియు విభిన్న వ్యవస్థల నుంచి వచ్చే వక్రమూలు ఖండించుకుంటాయనియు, $u = u_0, v = v_0$ వక్రాలు ఒకేసారి ఖండించుకుంటాయి కాని ఒకటి కంటే ఎక్కువ పర్యాయాలు ఖండించుకోవని వస్తుంది.

.3 అభ్యాసం :

I. క్రింది తలాలను పరామితి రూపంలో యిచ్చాము. ప్రతి సందర్భంలోను $f(x, y, z) = 0$ రూపంలో తలాల నిరూపణను కనుక్కోండి. మరియు u = స్థిరరాశి, v = స్థిరరాశి వక్రాలు తలంలో ఎటువంటి వక్రాలో కనుక్కోండి.

1. దీర్ఘ వృత్తజము (a sin u cos v, b sin u sin v, c cos u)
2. దీర్ఘవృత్త పరావలయజము (au cos v, bu sin v, u^2)
3. అతి పరావలయజము (au cos hv, bu sin hv, v^2)
4. ద్విఖండ అతిపరావలయజము (a sin hu cos v, b sin hu cos v, C cos hu)
5. శంకువు (a sin hu sin hv, b sin hu cos hv, C sin hu)
6. సమతలము (u + v, u – v, u)
7. స్థూపకము (u, u^2, v)

II. ఏక ఖండ అతి పరావలయజముపై పరామితి వక్రాలు

$\frac{x}{a} = \frac{\lambda + \mu}{1 + \lambda\mu}, \frac{y}{b} = \frac{1 - \lambda\mu}{1 + \lambda\mu}, \frac{z}{c} = \frac{\lambda - \mu}{1 + \lambda\mu}$ జనక రేఖలు.

$\lambda = \mu$, $\lambda\mu$ = స్థిరరాశి అనేవి ఎటువంటి వక్రాలను నిరూపణ చేస్తాయి ?

4.4. ప్రత్యేక సంకేతాలు (Specific notations) :

పరామితులు u, v ల గూర్చి పాక్షిక వ్యుత్పన్నాలను, పాదికలు 1, 2 లను ఉపయోగించి తెలుపుతాము.

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \vec{r}_{11} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}, \vec{r}_{12} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial d^2 \vec{r}}{\partial v\, \partial u}$$

$$\vec{r}_{22} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$\vec{r}$ యొక్క సంపూర్ణ అవకలని

$$d\vec{r} = \vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv$$

4.4.1 $\vec{r}\,' = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 v'$

$$\vec{r}\,'' = \vec{r}_1 u'' + \vec{r}_2 v'' + u'(\vec{r}_1)' + v'(\vec{r}_2)'$$

$$= \vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 v'' + u'(\vec{r}_{11} u' + \vec{r}_{12} v') + v'(\vec{r}_{21} u' + \vec{r}_{22} v')$$

4.4.2 $= \vec{r}_1 u'' + \vec{r}_2 v'' + \vec{r}_{11} u'^2 + 2\vec{r}_{12} u' v' + \vec{r}_{22} v'^2$

ఈ క్రింద చేయబడిన ఏ చర్చలోనైనా సదిశ $\vec{r}$ కి ప్రతి ప్రమాణములోను అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక వ్యుత్పన్నాలు ఉన్నాయని అనుకుందాము.

4.4.3 $\vec{r}_1 . \vec{r}_1 = E, \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = F, \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = G$C గాస్ సంకేతము లేదా తుల్యముగా,

$g_{ij} = \vec{r}_i . \vec{r}_j$ (టెన్సర్ సంకేతము)

కనక $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$ అని గ్రహించవచ్చు.

రాసులు g_{ij} లను ప్రథమ ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణాలంటాము.

తలము మీద యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\vec{N}$ అనుకుంటే

4.4.4 $H^2 = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^2 = \vec{r}_1^{\,2} . \vec{r}_2^{\,2} - (\vec{r}_1 . \vec{r}_2)^2 = EG - F^2$ అయినప్పుడు

4.4.5 $\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \dfrac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H}$

4.4.6 $\vec{N}.\vec{r}_{11} = L, \vec{N}.\vec{r}_{12} = M \quad \vec{N}.\vec{r}_{22} = N$

(గాస్ సంకేతములు) అని నిర్వచిద్దాము, లేదా

4.4.7 $\vec{b}_{ij} = \vec{N}.\vec{r}_{ij}$ (టెన్సర్ సంకేతము)

దీనినుంచి

$b_{11} = L, b_{12} = b_{21} = M, b_{22} = N$ అని గ్రహిస్తాము.

రాసులు b_{ij} లను (అంటే L, M, N లను)

ద్వితీయ ప్రమాణ మూల పరిమాణాలు అంటాము.

$\vec{N}.\vec{r}_i = 0$ (i = 1, 2) సమీకరణాల నుండి పరామితి u (లేదా v) ని పాక్షికంగా అవకలన చేయుటవలన వచ్చేడి సమీకరణాలలో పాక్షిక అవకలనాన్ని సూచించే పాదిక j అయితే

$\vec{N}.\vec{r}_{ij} + \vec{N}_j.\vec{r}_i = 0$ అని వస్తుంది.

లేదా

$b_{ij} = \vec{N}.\vec{r}_{ij} = -\vec{N}_i.\vec{r}_i = -\vec{r}_i.\vec{N}_j$

ఇది L, M, N ల మరియొక నిరూపణను ఇస్తుంది.

4.4.8 $L = b_{11} = -\vec{N}_1.\vec{r}_1, M = b_{12} = -\vec{N}_1.\vec{r}_2 = -\vec{N}_2.\vec{r}_1,$

$N = b_{22} = -\vec{N}_2.\vec{r}_2.$

4.5 అదిశా లబ్ధాలు : $\vec{N}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ సదిశల అదిశాత్రిక లబ్ధము

$[\vec{N}, \vec{r}_1, \vec{r}_2] = \vec{N}.\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{N}.H\vec{N} = H$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లతో $\vec{N}$ పై సదిశా లబ్ధాలు :

(i) $$\vec{r}_1 \times \vec{N} = \vec{r}_1 \times \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H} = \frac{(\vec{r}_1 . \vec{r}_2)\vec{r}_1 - (\vec{r}_1 . \vec{r}_1)\vec{r}_2}{H} = \frac{(F\vec{r}_1 - E\vec{r}_2)}{H}$$

(ii) $$\vec{r}_2 \times \vec{N} = \vec{r}_2 \times \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H} = \frac{(\vec{r}_2 . \vec{r}_2)\vec{r}_1 - (\vec{r}_2 . \vec{r}_1)\vec{r}_2}{H} = \frac{(G\vec{r}_1 - F\vec{r}_2)}{H}$$

4.6 అదిశా లబ్ధాలుగా ద్వితీయ ప్రమాణ పరిమాణాలు :

(4.4.4), (4.4.6[1])ల నుండి

$$H\, b_{ij} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 . \vec{r}_{ij} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{ij}]$$

(4.4.8) నుండి

4.6.1 $HL = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{11}], HM = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12}]$

$$HN = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{22}]$$

4.7 E, F, G ల పాక్షిక వ్యుత్పన్నాలు :

$$E_1 = (\vec{r}_1, \vec{r}_1)_1 = 2\,\vec{r}_1 . \vec{r}_{11}$$

$$E_2 = (\vec{r}_1 . \vec{r}_1)_2 = 2\,\vec{r}_1 . \vec{r}_{12}$$

$$F_1 = (\vec{r}_1 . \vec{r}_2)_1 = \vec{r}_1 . \vec{r}_{12} + \vec{r}_{11} . \vec{r}_2$$

$$F_2 = (\vec{r}_1 . \vec{r}_2)_2 = \vec{r}_1 . \vec{r}_{22} + \vec{r}_{12} . \vec{r}_2$$

$$G_1 = (\vec{r}_2 . \vec{r}_2)_1 = 2\,\vec{r}_2 . \vec{r}_{12}$$

$$G_2 = (\vec{r}_2 . \vec{r}_2)_2 = 2\,\vec{r}_2 . \vec{r}_{22}$$

వీటి నుండి

4.7.1 $\vec{r}_1 . \vec{r}_{11} = \frac{1}{2} E_1, \vec{r}_1 . \vec{r}_{12} = \frac{1}{2} E_2, \vec{r}_1 . \vec{r}_{22} = F_2 - \frac{1}{2} G_1$

$$\vec{r}_2 . \vec{r}_{11} = F_1 - \frac{1}{2} E_2, \vec{r}_2 . \vec{r}_{12} = \frac{1}{2} G_1, \vec{r}_2 . \vec{r}_{22} = \frac{1}{2} G_2$$

4.8 సంకలన సంకేత సంజ్ఞ (Summation Convention) :

ఏదైనా పదంలో పునరావృత పాదిక వచ్చినట్లైతే ఆపాదిక యొక్క అన్ని వీలైన విలువలకి సంకలనము తీసుకోవాలని గ్రహించాలి. కనక

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N = a_i b_i$$

$$u_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + u_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + u_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = u_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

అని రాస్తాము.

దీని బట్టి సంకలన సంజ్ఞ Σ ని వదిలి వేస్తున్నామని గ్రహించాలి.

4.9 మౌలిక రూపాలు :

u, v లలో గల ఆరు ప్రమేయాలు E, F, G, L, M, N లతో రెండు అవకలన వర్గ రూపాలను నిర్వచిస్తాము.

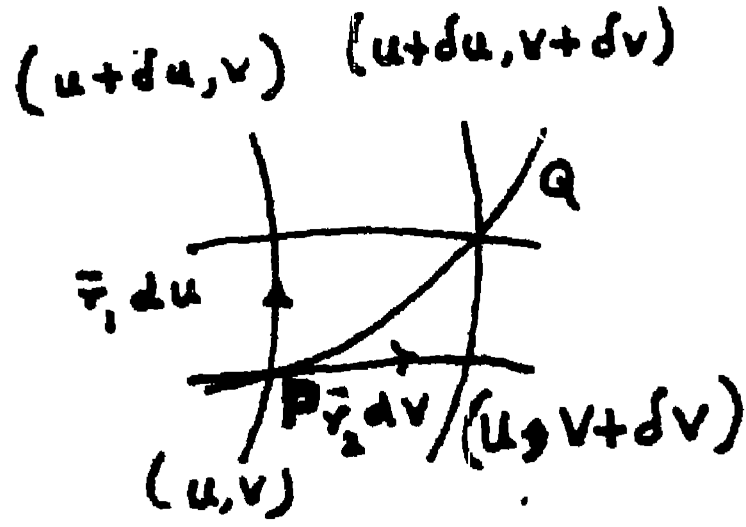
4.10 మెట్రిక్ లేదా ప్రథమ మౌలిక రూపము :

ఉపరితలముపై పరామితి విలువలు (u, v), (u + δu, v + δv) లకు అనుగుణంగా, క్రమంగా ఉన్న సామీప్య బిందువులు $P(\vec{r})$, $Q(\vec{r} + \delta\vec{r})$ అని అనుకుందాము. అప్పుడు

$$d\vec{r} = \vec{r}_1 du + \vec{r}_2 dv.$$

వక్రముపై P, Q లు సమీప బిందువులు కనక P, Q లను కలుపు చాప ఖండము యొక్క పొడవు ds, $|d\vec{r}|$ నకు సమానముగా తీసుకుంటాము.

$$E = \vec{r}_1^{\,2}, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2, G = \vec{r}_2^{\,2}$$ కనక



పటం

$$ds^2 = d\vec{r}^2 = (\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv)^2$$

$$= \vec{r}_1^{\,2}\, du^2 + 2\vec{r}_1 . \vec{r}_2\, dudv + \vec{r}_2^{\,2}\, dv^2$$

$$= E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

అవకలన వర్గ రూపము $ds^2 = E\, du^2 + 2f\, dudv + G\, dv^2$ ను తలము యొక్క ప్రథమ రూపమని, E, F, G లను ప్రథమ ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణాలని అంటాం.

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^2 = \vec{r}_1^{\,2} . \vec{r}_2^{\,2} - (\vec{r}_1 . \vec{r}_2)^2$$

$$= EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0$$

కనక

$EG - F^2 = H^2 > 0$ అని సూచిస్తాము.

పరామితుల ఎంపికతో E, F, G లలో మార్పు రావచ్చును గాని ప్రథమ మౌలిక రూపము పరామితీయ పరివర్తనలకు నిశ్చరము అని క్రింది సిద్ధాంతము చెబుతుంది.

4.11 సిద్ధాంతము : తలానికి ప్రథమ మౌలిక రూపము పరామితీయ పరివర్తనలకు నిశ్చరము.

ఉపపత్తి : $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ తలమునకు పరామితీయ చిత్రణము, $u' = \phi\,(u, v), v' = \psi\,(u, v)$ ల ద్వారా ఒక పరామితీయ పరివర్తన నిర్వచితమైందనుకుందాము. అప్పుడు

$$\vec{r}_1' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$= \vec{r}_1 \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_2 \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$= \vec{r}_1 \frac{\partial u}{\partial v'} + \vec{r}_2 \frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'$$

$$dv = \frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'$$

కనక,

$$E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2$$

$$= \vec{r}_1'^2 du'^2 + 2 r_1'. \vec{r}_2' du' dv' + r_2'^2 dv'^2$$

$$= (\vec{r}_1' du' + \vec{r}_2' dv')^2$$

$$= \left[\left(\vec{r}_1 \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_2 \frac{\partial v}{\partial v'}\right) du' + \left(\vec{r}_1 \frac{\partial u}{\partial u'} + \vec{r}_2 \frac{\partial v}{\partial v'}\right) dv'\right]^2$$

$$= \left[\vec{r}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'\right) + \vec{r}_2 \left[\frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'\right]\right]^2$$

$$= (\vec{r}_1 du + \vec{r}_2 dv)^2 = \vec{r}_1^2 du^2 + 2 \vec{r}_1. \vec{r}_2 dudv + \vec{r}_2^2 dv^2$$

$$= E du^2 + 2 F dudv + G dv^2.$$

4.12 కొన్ని ముఖ్యమైన తలముల ప్రథమ ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణములు :

4.12.1 మాంగే రూపములో తలము : $Z = f(x, y)$, x, y పరామితులు

$Z = f(x, y)$ కనక

$\vec{r} = [x, y, f(x, y)]$ అని తీసుకుంటాము.

$p = f_x, q = b_y, r = p_x, s = p_y = q_x, t = q_y$ అనుకుంటే

$\vec{r}_1 = (1, 0, p)$

$\vec{r}_2 = (0, 1, q)$

$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = 1 + p^2, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = pq$

$G = \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = 1 + q^2, H^2 = EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2.$

4.12.2 సార్వత్రిక భ్రమణోపరితలము :

Z – అక్షముపై పరిభ్రమణ కోణము θ అయితే,

$\vec{r}\,(u, \theta) = [g\,(u) \cos \theta, g\,(u) \sin \theta, f\,(u)]$

లేదా,

$\vec{r} = (g \cos \theta, g \sin \theta, f)$

$\vec{r}_1 = (g' \cos \theta, g' \sin \theta, f')$

$\vec{r}_2 = (-g \sin \theta, g \cos \theta, 0).$

$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = g'^2 + f'^2, F = 0, G = g^2,$

$H^2 = EG - F^2 = g^2 \left(g'^2 + f'^2\right).$

4.12.3 భ్రమణో పరితలము : భ్రమణో పరితలమందు ఏదైన ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}$ అనుకుంటే

$\vec{r} = (u \cos \theta, u \sin \theta, f\,(u))$

$\vec{r}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, f_1)$

$\vec{r}_2 = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0)$

$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = 1 + f_1^2, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = 0, G = \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = u^2$

$H = EG - F^2 = u^2\,(1 + f_1^2).$

4.12.4 శాంకవంటము :

$x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = f(\theta)$

$\vec{r} = (u\cos\theta, u\sin\theta, f(\theta))$

$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\vec{r}_2 = (-u\sin\theta, u\cos\theta, f')$

$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = 1, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = 0, G = \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = u^2 + f'^2$

$H^2 = EG - F^2 = u^2 + f'^2$

4.12.5 లంబకుండలిని :

$x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = c\theta$

$\vec{r} = (u\cos\theta, u\sin\theta, c\theta)$

$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\vec{r}_2 = (-u\sin\theta, u\cos\theta, c)$

$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = 1, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = 0, G = \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = u^2 + c^2$

$H^2 = EG - F^2 = u^2 + c^2.$

4.12.6 రేఖాజన్య తలము : రేఖా జన్యతలముపై సార్వత్రిక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{R}$ అని, భూవక్రము పై బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}(t)$ అని, P వద్ద జనక రేఖకి g(t) యూనిట్ సదిశని, P నుండి బిందువు Q, u దూరములో ఉందని అనుకుంటే $\vec{R} = \vec{r} + u\vec{g}$, మరియు

$$E = \dot{\vec{r}}^2 + 2u\dot{\vec{g}}\,\dot{\vec{r}} + u^2\dot{\vec{g}}^2, F = \vec{g}, \vec{r}, G = 1 \text{ అవుతాయి.}$$

4.12.7 ఉదాహరణ 1 : తలము $2Z = ax^2 + 2hxy + by^2$ (x, y లు పరామితులు) నకు మొదటి ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణములను కనుక్కోండి.

సాధనము : $\vec{r} = \left(x, y, \frac{a}{2} x^2 + hxy + \frac{b}{2} y^2\right)$

$$\vec{r}_1 = (1, 0, ax + hy)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 1, hx + by)$$

$$E = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = 1 + (ax + hy)^2$$

$$F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = (ax + hy)(hx + by)$$

$$G = \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = (1 + hx + by)^2$$

$$H^2 = EG - F^2 = + (ax + hy)^2 + (hx + by)^2.$$

4.12.8 ఉదాహరణ 2 :

a) $\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_2\right] = H$

b) $(\vec{r}_1 \times \vec{N}) = \dfrac{(F\vec{r}_1 - E\vec{r}_2)}{H}$

c) $\vec{r}_2 \times \vec{N} = \dfrac{G\vec{r}_1 - F\vec{r}_2}{H}$ అని చూపండి.

సాధనము : a) $\left[\vec{N}, \vec{r}_1, \vec{r}_2\right] = \vec{N} . (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$

$$= \left(\vec{N} . \vec{N} H\right)$$

$$= \left(\vec{N} . \vec{N}\right) H = H$$

b) $\vec{r}_1 \times \vec{N} = \vec{r}_1 \times \dfrac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H}$

$$= \frac{1}{H}\left[\vec{r}_1 . \vec{r}_2 \vec{r}_1 - \vec{r}_1 . \vec{r}_1 \vec{r}_2\right]$$

$$= \frac{1}{H}\left(F\vec{r}_1 - E\vec{r}_2\right)$$

c) $\vec{r}_2 \times \vec{N} = \vec{r}_2 \times \dfrac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H}$

$$=\frac{1}{H}\left(\vec{r}_2.\vec{r}_2\vec{r}_1-\vec{r}_2.\vec{r}_1\vec{r}_2\right)$$

$$=\frac{1}{H}\left(G\vec{r}_1-F\vec{r}_2\right)$$

4.12.9 ఉదాహరణ 3 : తలము $x = a(u+v), y = b(u-v), z = uv$ పై పరామితీయ వక్రములు ఋజు రేఖలని నిరూపించుము. మరియు మొదటి ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణములను కనుక్కోండి.

సాధనము : $\vec{r} = (a(u+v), b(u-v), uv)$

$$\vec{r}_1 = (a, b, v)$$

$$\vec{r}_2 = (a, -b, u)$$

$$E = \vec{r}_1.\vec{r}_1 = a^2 + b^2 + v^2$$

$$F = \vec{r}_1.\vec{r}_2 = a^2 - b^2 + uv$$

$$G = \vec{r}_2.\vec{r}_2 = a^2 + b^2 + u^2$$

పరామితీయ వక్రము $u =$ స్థిరము $= c$ అనుకుంటే

$x = a(c+v), y = b(c-v), z = cv$ అవుతాయి. v ని వాటి మధ్య నుంచి తొలగిస్తే,

$$x = a\left(c+\frac{z}{c}\right), y = b\left(c-\frac{z}{c}\right).$$

ఇవి రెండు సమతలాలని వర్ణన చేస్తాయి. వాటి ఛేదకము ఒక ఋజు రేఖ. ఇదే విధంగా పరామితీయ వక్రము $v =$ స్థిరము కూడా ఒక ఋజు రేఖ అని చూపించవచ్చును.

ద్వితీయ మౌలిక రూపము - దాని సార్థకత

4.12.10 ద్వితీయ మౌలిక రూపము :

$\vec{r}' = \vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 u' + \vec{r}_2 v'$ అనియు

$\vec{r}'' = \vec{r}_{11} u'^2 + 2\vec{r}_{12} u'v' + \vec{r}_{22} v'^2 + \vec{r}_1 u'' + \vec{r}_2 v''$ అని మనకు తెలుసు.

$\vec{N}.\vec{r}_1 = 0, \vec{N}.\vec{r}_2 = 0, \vec{N}.\vec{r}_{11} = L, \vec{N}.\vec{r}_{12} = M, \vec{N}.\vec{r}_{22} = N$ కనక, పై సమీకరణములను $\vec{N}$ తో అదిశ లబ్ధము చేసినచో,

4.12.11 $$\vec{N}\,\vec{r}'' = \vec{N}.\vec{r}_{11}u'^2 + 2\vec{N}.\vec{r}_{12}u'v' + \vec{N}.\vec{r}_{22}v'^2$$

$$= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$$

$$= \frac{(L\,du^2 + 2\,M\,dudv + N\,dv^2)}{Edu^2 + 2\,F\,dudv + G\,dv}$$

(4.12.11) నందు లవములో ఉన్న అవకలన వర్గ రూపమును ద్వితీయ మౌలిక రూపమని అంటాము.

4.12.12 $$II = L\,du^2 + 2\,M\,dudv + N\,dv^2$$

సమీకరణము (4.12.12) వేరే రీతిలో కూడా లభించును.

$d\vec{N} = \vec{N}_1\,du + \vec{N}_2\,dv, d\,\vec{r} = \vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv,$

$\vec{N}_i.\,\vec{r}_j = -b_{ij}\,(b_{11} = L, b_{12} = b_{21} = M, b_{22} = N)$

కనక

$$d\vec{N}.\,d\vec{r} = (\vec{N}_1\,du + \vec{N}_2\,dv).\,(\vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv)$$

$$= (\vec{N}_1.\,\vec{r}_1)\,du^2 + (\vec{N}_1.\,\vec{r}_2 + \vec{N}_2.\,\vec{r}_1)\,dudv + (\vec{N}_2.\,\vec{r}_2)\,dv^2$$

లేదా

4.12.13 $$II = -d\,\vec{N}.\,d\vec{r} = L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$$

$LN - M^2$ ను T^2 తో సూచిస్తాము T^2 ధనాత్మకము కానవసరము లేదు.

$\therefore\ LN - M^2 = T^2.$

4.13 నిశ్చిత ధనాత్మకము :

రెండు వాస్తవ చలరాశులు $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ల వర్గ రూపము.

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

అయితే, $Q > 0 \ \forall \ (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ అయినప్పుడు, Q ని నిశ్చిత ధనాత్మకమని అంటాము. Q నిశ్చిత ధనాత్మకమగుటకు ఈ క్రింది నిబంధనలను పాటించవలెను.

i) $a_{12} = a_{21}$

ii) $a_{11} > 0$

iii) $a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) > 0.$

$E = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 > 0, EG - F^2 = H^2 > 0$, కనక,

$I = Edu^2 + 2 Fdudv + Gdv^2$

ఎల్లప్పుడు నిశ్చిత ధనాత్మకము. కాని

$II = Ldu^2 + 2 M dudv + N dv^2$

నిశ్చిత ధనాత్మక మగుటకు $- L > 0$, విచక్షిణి $b = LN - M^2 = T^2 > 0$ కావాలి. ఈ నిబంధనలు ఎల్లప్పుడు చెల్లవు.

4.14 గాసియన్ వక్రత :

తలమందలి ఏదైనా బిందువు P వద్ద ద్వితీయ మౌలిక రూపము మరియు ప్రథమ మౌలిక రూపముల నిష్పతిని P వద్ద గాసియన్ వక్రతని అంటాము. దీనిని K తో సూచిస్తాము.

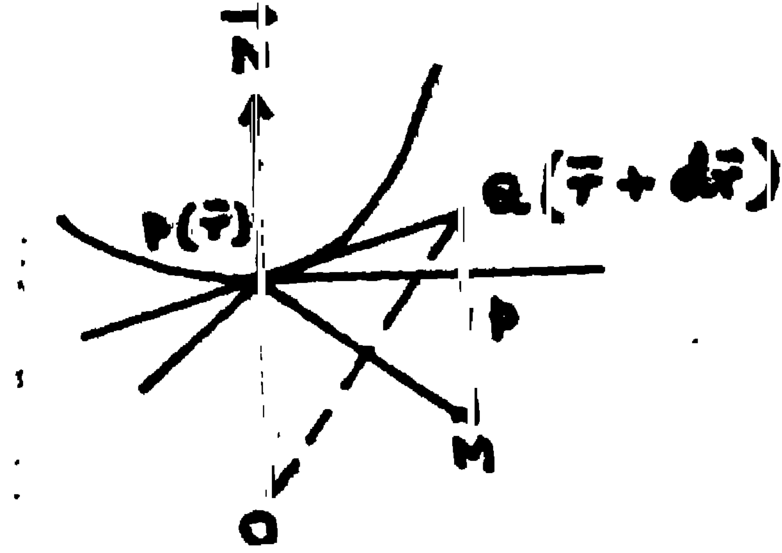
$$\therefore K = \frac{b}{a} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{T^2}{H^2}$$

$T^2 >, =, < 0$ అయినప్పుడు $K >, =, < 0$ అవుతుంది.

4.15 ద్వితీయ మౌలిక రూపము యొక్క జ్యామితీయ వివరణ :

తలముపై (u, v), (u + du, v + dv) లు సామీప్య బిందువులు. P వద్ద గల స్పర్శ తలమునకు (u + du, v + dv) నుండి వచ్చు లంబము యొక్క పొడవు

$\frac{1}{2}$ $(L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2)$ నకు సమానమని చూపించెదము.



పటం

తలముపై $P(\vec{r})$, స్పర్శతలము యొక్క స్పర్శబిందువు. $Q(\vec{r} + d\vec{r})$, $P(\vec{r})$ కు సామీప్య బిందువు. వాటి పరామితీయ విలువలు (u, v), $(u + du, v + dv)$ అని అనుకుందాము. టేలర్ శ్రేణుం నుండి

$$\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + (\vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv) + \frac{1}{2}(\vec{r}_{11}\,du^2 + ...) + ...$$

Q నుండి P వద్ద స్పర్శ తలమునకు వచ్చు లంబము పొడవు $QM = P$ అనుకుందాము. ఇది P వద్ద అభిలంబముపై సదిశ $\overrightarrow{PQ}$ యొక్క విక్షేపమునకు సమానము కనుక

$$P = \vec{N}.\,d\vec{r}$$

$$= \vec{N}.\,(\vec{r}_1\,du + \vec{r}_2\,dv) + \frac{1}{2}\vec{N}.\,(\vec{r}_{11}\,du^2 + ...) + ...$$

$$= \frac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2)$$

అధ్యాయము 12లో చర్చించిన కొన్ని ముఖ్యమైన తలములకు రెండవ ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణములు కనుక్కొందాము.

4.16.1 మాంగే రూపములో తలము :

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y))$$

$$\vec{r}_1 = (1, 0, p),\ \vec{r}_2 = (0, 1, q)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, r),\ \vec{r}_{12} = (0, 0, s),\ \vec{r}_{22} = (0, 0, t)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{H} = \frac{(-p, -q, 1)}{H}$$

$$L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{11} = \frac{r}{H},\ M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{11} = \frac{s}{H}$$

$$N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{22} = \frac{t}{H},\ T^2 = LN - M^2 = \frac{(rt - s^2)}{H^2}.$$

4.16.2 సార్వత్రిక భ్రమణోపరితలము :

$$\vec{r} = (g \cos\theta, g \sin\theta, f)$$

$$\vec{r}_1 = (g \cos\theta, g \sin\theta, f')$$

$$\vec{r}_2 = (-g \sin\theta, g \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = g(-f' \cos\theta, -f' \sin\theta, g') = H\vec{N}$$

$$\vec{r}_{11} = (g'' \cos\theta, g'' \sin\theta, f'')$$

$$\vec{r}_{12} = (-g' \sin\theta, g' \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_{22} = (-g \cos\theta, g \sin\theta, 0)$$

$$H^2 = g(g' f'' - f' g''),\ HM = 0,\ HN = g^2 f'$$

4.16.3 భ్రమణోపరితలము :

$$\vec{r} = (u \cos\theta, u \sin\theta, f(u))$$

$$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, f_1)$$

$$\vec{r}_2 = (-u \sin\theta, u \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, f_{11}),\ \vec{r}_{12} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_{22} = (-u\cos\theta, -u\sin\theta, 0)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{H} = \frac{(-u\cos\theta\, f_1, -u\sin\theta\, f_1, u)}{H}$$

$$L = \vec{N}\,.\,\vec{r}_{11} = \frac{u f_{11}}{H}, M = \vec{N}\,.\,\vec{r}_{12} = 0$$

$$N = \vec{N}\,.\,\vec{r}_{22} = \frac{u^2 f_1}{H}, T^2 = LN - M^2 = \frac{u^3 f_1 f_{11}}{H^2}$$

4.16.4 శంకవ తలము :

$$\vec{r} = (u\cos\theta, u\sin\theta, f(\theta))$$

$$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (-u\sin\theta, u\cos\theta, f')$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{12} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_{22} = (-u\cos, -u\sin\theta, f'')$$

$$\vec{N} = \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{H} = \frac{(f'\sin\theta, -f'\cos\theta\, u)}{H}$$

$$L = \vec{r}_{11}.\,\vec{N} = 0, M = \vec{r}_{12}.\,\vec{N} = \frac{-f'}{H}$$

$$N = \vec{r}_{22}.\,\vec{N} = \frac{uf''}{H}.$$

4.16.5 లంబ కుండలిని :

$$\vec{r} = (u\cos\theta, u\sin\theta, c\theta)$$

$$\vec{r}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (-u\sin\theta, u\cos\theta, c)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{12} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_{22} = (-u\cos\theta, -u\sin\theta, 0)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{H} = \frac{(-\sin\theta, -c\cos\theta, u)}{H}$$

$$L = \vec{N}.\ \vec{r}_{11} = 0, M = \vec{N}.\ \vec{r}_{12} = \frac{C}{H}$$

$$N = \vec{N}.\ \vec{r}_{22} = 0.$$

4.16.6 రేఖా జన్య తలము :

(4.12.6) నుండి ,

$$HL = [\dot{\vec{r}}, \vec{r}, \vec{g}] + [\dot{\vec{g}}, \vec{r}, g]u + [\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{g}}, \vec{g}]u + [\dot{\vec{g}}, \dot{\vec{g}}, \vec{g}]u^2$$

$$HM = [\dot{\vec{g}}, \vec{g}, \dot{\vec{g}}]$$

$$HN = 0.$$

4.17 ఉదాహరణ 1 :

సదిశలు u, v ల సమతలము యొక్క ఒక ప్రదేశమునందు తలము $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ నకు $II = \alpha ds^2 (\alpha \neq 0)$ అయితే, వ్యాసార్ధము $\frac{1}{\alpha}$ గల గోళము యొక్క భాగాన్ని $\vec{r}(u, v)$ వర్ణన చేయును.

సాధనము : $b_{11} = \alpha E, b_{12} = \alpha F, b_{22} = \alpha G$ కనక $\vec{N}_i . \vec{r}_j = -\alpha\ \vec{r}_i . \vec{r}_j$

లేదా

4.17.1 $\left(\vec{N}_i + \alpha\ \vec{r}_i\right) . \vec{r}_j = 0$

$$\vec{N} . \vec{N}_i = 0, \vec{N} . \vec{r}_i = 0$$

4.17.2 $\Rightarrow (\vec{N}_i + \alpha \vec{r}_i) . \vec{N} = 0$

(4.17.1), (14.17.2) ల నుండి,

$$\vec{N}_i + \alpha \vec{r}_i = 0$$

మరియు స్వతంత్ర సదిశలు

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}$ లకు లంబకోణీయతగా నుండును.

$\vec{N}_i = - \alpha \vec{r}_i$ ను v తోటి అవకలనము చేస్తే,

$\vec{N}_{ij} = - \alpha_j \vec{r}_i - \alpha \vec{r}_{ij}$ అని వస్తుంది.

కనక

$$\vec{N}_{12} = - \alpha_2 \vec{r}_1 - \alpha \vec{r}_{12}$$

$$\vec{N}_{21} = - \alpha_1 \vec{r}_2 - \alpha \vec{r}_{21}$$

$\vec{N}_{12} = \vec{N}_{21}, \vec{r}_{12} = \vec{r}_{21}$, కనక,

$$\alpha_1 \vec{r}_2 - \alpha_2 \vec{r}_1 = 0$$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు స్వతంత్ర సదిశలు కనక $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ మరియు α స్థిరము,

$\vec{R} = \vec{r}(u, v) + \frac{1}{\alpha} \vec{N}$ అని తీసుకుంటే,

$\vec{R}_i = \vec{r}_i + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \vec{N}_i = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow \vec{R}$ ఒక స్థిరరాశి.

మరియు

$$| \vec{R} - \vec{r}(u, v) | = \frac{\vec{N}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{R}$ స్థిరము, తలమునుండి బిందువు యొక్క దూరము కూడా స్థిరము కావున $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ఒక గోళము.

ఉదాహరణ 2 :

తలము $2z = ax^2 + 2hxy + by^2$, (x, y లు పరామితులు) నకు రెండవ ప్రమాణ మౌలిక పరిమాణములు మరియు తలము యొక్క అభిలంబము కనుక్కోండి.

సాధనము : $\vec{r} = \left(x, y, \frac{a}{2} x^2 + hxy + \frac{b}{2} y^2\right)$

$$\vec{r}_1 = (1, 0, ax + hy)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 1, hx + by)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, a), \vec{r}_{12} = (0, 0, h) = \vec{r}_{21}$$

$$\vec{r}_{22} = (0, 0, b)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{H} = \frac{|-(ax + hy), -(hx + by), 1|}{H}$$

$$L = \vec{r}_{11} \cdot \vec{N} = \frac{a}{H}, M = \vec{r}_{12} \cdot \vec{N} = \frac{h}{H},$$

$$N = \vec{r}_{22} \cdot \vec{N} = \frac{b}{H}$$

$$T^2 = LN - M^2 = \frac{ab - h^2}{H^2}.$$

ఉదాహరణ 3 :

తలము సందలి అన్ని బిందువుల వద్ద L, M, N లు సున్న (vanish) అయితే ఆ తలము సమతలము సందలి భాగమని నిరూపించుము.

సాధనము : తలము సమతలమైతే, తలము మీది ప్రతి బిందువు వద్ద అభిలంబాలు సమాంతరముగా ఉంటాయి. అంటే సమతలము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద $\vec{N}$ స్థిరము.

4.17.3 $L = \vec{N}_1 \cdot \vec{r}_1 = 0, M = -\vec{N}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$

4.17.4 $N = -\vec{N}_2 \cdot \vec{r}_2 = 0, M = -\vec{N}_2 \cdot \vec{r}_1 = 0$ మరియు

$\vec{r}_1 \neq 0, \vec{r}_2 \neq 0$ కనుక $\vec{N}_1 = 0$ లేదా $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు రెండింటికి $\vec{N}_1$ లంబము కావాలి. అంటే $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ నకు $\vec{N}_1$ సమాంతరముగా వుంటుంది. లేదా $\vec{N}_1$, $H\vec{N}$ కి సమాంతరంగా వుంటుంది. అంటే $\vec{N}_1, \vec{N}$ కి సమాంతరంగా వుంటుంది. కాని ఇది, స్థిరమైన పరిమాణముగల సదిశ $\vec{N}$ దాని మొదటి వ్యుత్పన్నమునకు లంబముగా వుంటుంది. అన్నదానికి విరుద్ధం కనుక $\vec{N}_1 = 0$ కావలెను. అంటే $\vec{N}$ పరామితి u మీద ఆధారపడటం లేదు. ఇదే విధంగా సమీకరణ (4.17.4) నుండి $\vec{N}_2 = 0$ అని వస్తుంది. అంటే $\vec{N}$ పరామితి v మీద కూడా ఆధారపడటం లేదు. అంటే తలము మీద ప్రతిబింబము వద్ద, $\vec{N}$ స్థిర సదిశ.

ఉదాహరణ 4 :

సమీకరణములు $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$ వ్యవస్థితమయ్యే వాస్తవ తలము, సమతలము కాని గోళీయము కాని అవుతుందని మాపించండి.

సాధనము : $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = \frac{1}{\lambda}$ అనుకుందాము.

$$\therefore\ L = E\lambda,\ M = F\lambda,\ N = G\lambda$$

$L = E\lambda$ నుండి

$$-\vec{N}_1 . \vec{r}_1 = \vec{r}_1 . \vec{r}_1 \lambda$$

లేదా

$$4.17.5 \quad (\vec{N}_1 + \lambda \vec{r}_1) . \vec{r}_1 = 0$$

$M = F\lambda$, $N = G\lambda$ ల నుండి

$$4.17.6 \quad (\vec{N}_2 + \lambda \vec{r}_2) . \vec{r}_1 = 0,\ (\vec{N}_1 + \lambda \vec{r}_1) . \vec{r}_2 = 0,$$

$(\vec{N}_2 + \lambda \vec{r}_2) . \vec{r}_2 = 0$ అని వస్తుంది.

సదిశలు $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు ఉండే సమతలంలో $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ లు ఉంటాయని మనకు తెలుసును. $\therefore \vec{r}_1, \vec{r}_2$ లు ఉండే సమతలంలో $\vec{N}_1 + \lambda \vec{r}_1, \vec{N}_2 + \lambda \vec{r}_2$ లు ఉంటాయి. అంటే $\vec{r}_1$

మరియు $\vec{r}_2$ నకు $\vec{N}_1 + \lambda\vec{r}_1$ లంబము కాదు. మరియు $\vec{r}_1 \neq 0$, $\vec{r}_2 \neq 0$ కనుక (4.17.5), (4.17.6) ల నుండి

4.17.7 $\vec{N}_1 + \lambda\vec{r}_1 = 0$ అని వస్తుంది. ఇదే విధంగా

4.17.8 $\vec{N}_2 + \lambda\vec{r}_2 = 0$

అని వస్తుంది. సమీకరణము (4.17.7) ను రెండవ పరామితితోను, (4.17.8) ను మొదటి పరామితితోను అవకలనము చేస్తే

$$\vec{N}_{12} + \lambda_2 \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_{12} = 0$$

$$\vec{N}_{21} + \lambda_1 \vec{r}_2 + \lambda \vec{r}_{21} = 0$$

వ్యవకలనము చేస్తే,

$\lambda_2 \vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_2$ అని వస్తుంది.

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ కి సమాంతరము కాదు కనుక

$\lambda_2 \vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_2$ వ్యవస్థితము కావాలంటే, $\lambda = \lambda_2 = 0$ అవాలి.

అంటే పరామితీయాలు u, v ల మీద λ ఆధార పడటం లేదు. అంటే λ ఒక స్థిరరాశి.

(4.17.7) నుండి $\lambda \neq 0$ అయితే,

$\vec{r}_1 = -\frac{1}{\lambda} \vec{N}_1$ అని వస్తుంది.

సమాకలనము చేస్తే,

'a' సమాకలన స్థిర సదిశ, $\vec{N}^2 = 1$ కనుక $(\vec{r} - a)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \vec{N}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$...

దీని నుండి $\vec{r}$ యొక్క బిందు పథము గోళము అని తెలుస్తోంది. అంటే $\lambda \neq 0$ అయినప్పుడు తలము గోళీయము.

$\lambda = 0$ అయితే (4.17.7), (4.17.8) ల నుండి

$\vec{N}_1 = 0, \vec{N}_2 = 0$ అవుతుంది.

అంటే $\vec{N}$ పరామితులు u, v ల మీద ఆధార పడటం లేదు. అంటే తలము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద $\vec{N}$ ఒక స్థిరసదిశ. అంటే తలము సమతలమని గ్రహించవగలము.

4.18 అభ్యాసము : 1

4.18.1 ఈ క్రింది తలములకు యూనిట్ అభిలంబ సదిశ మరియు మౌలిక రూపములు కనుక్కోండి.

(i) $\vec{r} = (u + v, 1 - uv, u - v)$

(ii) $\vec{r} = (a \cos u, a \sin u, bv)$

(iii) $\vec{r} = (e^u, e^v, uv)$

(iv) $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, f(u) + cv)$

(v) $\vec{R} = \vec{r} + u\,\vec{b}$ (ఉప అభిలంబముల జనక తలము, $\vec{r}$, $\vec{b}$ లు s యొక్క ప్రమేయములు, u, s లు పరామితులు).

4.18.2 λ యొక్క అన్ని విలువలకు వక్రములు $\theta = \lambda$ మీద, తలము $\vec{r} = (u \cos \theta, u \sin \theta, \theta + \log \cos \omega$ మీది వక్రములు $u = a, u = b$ సమానమైన పొడవుగల అంతర ఖండములు చేస్తాయని నిరూపించండి.

[సూచన : $(ds)^2 = \sec^2 u\,(du)^2 - 2 \tan u\,du\,d\theta + (1 + u^2)(d\theta)^2$, $\theta = \lambda$ నకు, $ds = \sec du$, $s = [\log(\sec u + \tan u)]_a^b$, ఇది λ మీద ఆధారపడలేదు.].

వెయిన్ గార్టన్ సమీకరణములు :

4.19 ఉపరితల అభిలంబ సదిశ $\vec{N}$ యొక్క వ్యుత్పన్నములు :

$\vec{N}$ ఒక యూనిట్ సదిశ కనుక $\vec{N}.\vec{N} = 1$ దీని నుండి $\vec{N}.d\vec{N} = 0$ అవుతుంది. కనుక $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లతో జనింప చేయబడిన స్పర్శము తలముపై ఉంటుంది.

$\vec{N}.d\vec{N} = 0$ ని $\vec{N}.\vec{N}_1 = 0$ గా తిరిగి రాస్తే, $\vec{N}_1$ తలమునకు స్పర్శరేఖీయమవుతుంది.

4.19.1 $\therefore \vec{N}_1 = a\,\vec{r}_1 + b\,\vec{r}_2,$

a, b లు కనుక్కోవలసిన స్థిరరాశులు.

$\vec{r}_i . \vec{r}_j = g_{ij}, -\vec{r}_i . \vec{N}_j = \vec{N} . \vec{r}_{ij} = b_{ij}$

అని మనమింతకు ముందు చూసాము. (14.4.3) నుండి

$\vec{r}_1 . \vec{N}_1 = a\,\vec{r}_1^{\,2} + b\,\vec{r}_1 . \vec{r}_2$ లేదా $-L = aE + bF$

మరియు $\vec{r}_2 . \vec{N}_1 = a\vec{r}_2 . \vec{r}_1 + b\vec{r}_2^{\,2}$ లేదా $-M = aF + bG$ అని వస్తుంది.

ఈ సమీకరణాలను a, b ల కోసం సాధిస్తే,

$$a = \frac{FM - GL}{EG - F^2}\ ;\ b = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

అని వస్తుంది. a, b ల విలువలను (4.19.1) లో ప్రతిక్షేపణ చేస్తే,

4.19.2 $H^2\vec{N}_1 = (FM - GL)\,\vec{r}_1 + (FL - EM)\,\vec{r}_2$ అని వస్తుంది.

మనము $\vec{N}_2 = a'\,\vec{r}_1 + b'\,\vec{r}_2$ అనే సంబంధముతో మొదలు పెట్టినట్లయితే a', b' లు కనుక్కోవలసిన స్థిర రాశులవుతాయి. మరియు,

$\vec{r}_1 . \vec{N}_2 = a'\,\vec{r}_1^{\,2} + b'\,\vec{r}_1 . \vec{r}_2$ లేదా

$a'E + b'F + M = 0$

$\vec{r}_2 . \vec{N}_2 = a'\,\vec{r}_1 . \vec{r}_2 + q\,\vec{r}_2^{\,2}$ లేదా $a'F + b'G + N = 0$ అవుతుంది.

a', b' ల కోసం ఈ సమీకరణాలను సాధిస్తే,

$$\frac{a'}{FN - GM} = \frac{b'}{FM - EN} = \frac{1}{EG - F^2} = \frac{1}{H^2}$$

మరియు,

4.19.3 $H^2\vec{N}_2 = (FN - GM)\,\vec{r}_1 + (FM - EN)\,\vec{r}_2$ అని వస్తుంది.

సమీకరణము (4.19.2), (4.19.3) లను తలము యొక్క వెయిన్ గార్టన్ సమీకరణాలని అంటారు. వీటికి తుల్యమైన మాత్రిక.

$$H^2 \begin{pmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} FM - GL & FL - EM \\ FN - GM & FM - EN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix}$$

అపేక్షింపబడిన మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము Δ అనుకుంటే,

4.19.4 $$|\Delta| = (FM - GL)(FM - EN) - (FL - EM)(FN - GM) = H^2 T^2$$

$|\Delta| \neq 0$ కనుక, Δ యొక్క విలోమము అస్తిత్వము మరియు (14.1.1) యొక్క విలోమము

$$T^2 \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FM - EN & EM - FL \\ GM - FN & FM - GL \end{bmatrix}$$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ లను సమీకరణములు (4.19.2), (4.19.3) ల నుండి పారంపర్యంగా తీసివేస్తే,

$$T^2 \vec{r}_1 = (FM - EN) \vec{N}_1 + (EM - FL) \vec{N}_2$$

$$T^2 \vec{r}_2 = (GM - FN) \vec{N}_1 + (FM - GL) \vec{N}_2$$

సమీకరణములు (14.1.2), (14.1.3) ల నుండి,

$$H^4 \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = |\Delta| \; \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = H^2 T^2 . H \vec{N}$$ అని వచ్చును.

కనుక $$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{N} \left(\frac{T^2}{H}\right)$$

లేదా

$$H (\vec{N}_1 \times \vec{N}_2) = \vec{N} T^2 = \vec{N} (LN - M^2).$$

4.20 ఉప సిద్ధాంతము 1 :

$$\left[\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}\right] = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 . \vec{N} = \frac{T^2}{H}.$$

4.21 ఉప సిద్ధాంతము 2 :

$\vec{N}, \vec{N}_i, \vec{r}_j$ ల అదిశ లబ్ధము (14.1.2) నుండి

$$H^2 \vec{N}_1 \times \vec{r}_1 = (FL - EM)\,\vec{r}_2 \times \vec{r}_1 = (EM - FL)\,\vec{N}\, H$$

$$\Rightarrow H\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_1\right] = H\vec{N}\cdot\vec{N}_1 \times \vec{r}_1 = EM - FL$$

$$H^2 \vec{N}_1 \times \vec{r}_2 = (FM - GL)\,\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (FM - GL)\,\vec{N}\, H$$

$$\Rightarrow H\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_2\right] = H\vec{N}\cdot\vec{N}_1 \times \vec{r}_2 = FM - GL$$

(14.1.3) నుండి,

$$H^2 \vec{N}_2 \times \vec{r}_1 = (EN - FM)\,\vec{N}\, H$$

$$\Rightarrow H\left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_1\right] = EN - FM$$

$$H^2 \vec{N}_2 \times \vec{r}_2 = (FM - EN)\,\vec{N}\, H$$

$$\Rightarrow H\left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_2\right] = FM - EN$$

సూచన :

కొత్త సంకేతాలనుసరించి, అంటే b_{ij}, g_{ij} లతో ఉపసిద్ధాంతము (14.3) లోని నాలుగు ఫలితాలని $H\left[\vec{N}, \vec{N}_j, \vec{r}_i\right] = g_{ij}\, b_{2j} - g_{2i}\, b_{1j}$ అనే ఒక్క సమాసముతో రాయవచ్చును.

4.22 ఉదాహరణ 1 :

i) $H\vec{N} \times \vec{N}_1 = M\vec{r}_1 - L\vec{r}_2$

ii) $H\vec{N} \times \vec{N}_2 = N\vec{r}_1 - M\vec{r}_2$ అని నిరూపించండి.

4.22.1 $H\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ అని మనకు తెలియును. పరామితి u తో దీనిని అవకలనము చేస్తే

$$H\vec{N}_1 + H_1\vec{N} = \vec{r}_{11} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_{12}$$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow H\vec{N}\times\vec{N}_1=\vec{N}\times(\vec{r}_{11}\times\vec{r}_2)+\vec{N}'\times(\vec{r}_1\times\vec{r}_{12})$$

$$=\vec{N}.\vec{r}_2\,\vec{r}_{11}-\vec{N}'.\vec{r}_{11}\,\vec{r}_2+\vec{N}'.\vec{r}_{12}\,\vec{r}_1\,\vec{N}.\vec{r}_1\,\vec{r}_{12}$$

$$\because\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}.\vec{c}\,\vec{b}-\vec{a}.\vec{b}\,\vec{c}.$$

$$\vec{N}.\vec{r}_1=0, \vec{N}.\vec{r}_2=0, \vec{N}'.\vec{r}_{11}=L, \vec{N}'.\vec{r}_{12}=M$$

కనక,

$$H\vec{N}\times\vec{N}_1=-L\vec{r}_2+M\vec{r}_1=M\vec{r}_1-L\vec{r}_2$$

రెండవ సంబంధము (ii) ని నిరూపించుటకు (4.23.1) ని పరామితి v తో అవకలనము చేసి పై విధముగా వర్తిస్తే, $H\vec{N}\times\vec{N}_2=N\vec{r}_1-M\vec{r}_2$ అని వస్తుంది.

4.23 ఉదాహరణ 2 :

$$H^2 e = EM^2 - 2\,FLM + GL^2$$

$$H^2 f = EMN - F\,(LN + M^2) + GLM,$$

$H^2 g = EN^2 - 2\,FMN + GM^2$ అయినప్పుడు,

$$T^2\vec{N}_1\times\vec{N}=H\left(f\vec{N}_1-e\vec{N}_2\right),$$

$T^2\vec{N}_2\times\vec{N}=H(g\vec{N}_1-f\vec{N}_2)$ అని చూపించండి.

5.
తలము – వక్రాలు

5.1 దిక్ గుణకములు :

తలముపై ఏ బిందువు వద్దనైనా యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\vec{N}$, స్పర్శరేఖీయ సదిశలు $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ అనే మూడు స్వతంత్ర సదిశల సమితి ఉంటుంది. P వద్ద యాదృచ్ఛిక సదిశ $\vec{C}$ అనుకుంటే,

5.1.1 $\vec{C} = C_n\vec{N} + \vec{a} = C_n\vec{N} + (\lambda\,\vec{r}_1 + \mu\,\vec{r}_2)$

అని చెప్పవచ్చును. సమీకరణము (5. 1. 1) చే C_n, λ, μ లు ఏకైకంగా నిర్వచింప బడినవి. $\vec{C}$ యొక్క స్పర్శరేఖీయ భాగము

$$\vec{a} = (\lambda, \mu) = \lambda\,\vec{r}_1 + \mu\,\vec{r}_2 \text{ ని}$$

స్పర్శ రేఖీయ సదిశగాగాని, λ, μ లు అంశములుగాగల కంట్రా వేరియంట్ సదిశ (λ, μ) గా గాని సూచించవచ్చును. λ, μ లను $\vec{a}$ యొక్క కంట్రా వేరయంట్ నిరూపకాలని కూడా అంటాము.

$$\vec{a}^2 = (\lambda\,\vec{r}_1 + \mu\,\vec{r}_2)^2 = \lambda^2\,\vec{r}_1^{\,2} + 2\lambda\mu\,\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \mu^2\,\vec{r}_2^{\,2}$$

లేదా

5.1.2 $|\vec{a}| = (E\,\lambda^2 + 2\,F\lambda\mu + G\mu^2)^{1/2}$

P వద్దగల స్పర్శ తలము నందలి దిశని వర్ణించుటకు యూనిట్ సదిశ $\vec{e}$ యొక్క అంశములు (l, m) లని ఉపయోగిస్తాము. మరియు వాటిని దిక్ గుణకములని అంటాము.

5.1.3 $\vec{e} = (l, m) = l\,\vec{r}_1 + m\,\vec{r}_2$ మరియు,

5.1.3[1] $1 = |\vec{e}| = |l\ \vec{r}_1 + m\ \vec{r}_2|^2 = El^2 + 2\,Flm + Gm^2$

అనే నియమమును (l, m) లు తృప్తిపరచవలెను.

$$\cos\theta = \vec{e}\,.\,\vec{e}\ \ \text{మరియు}\ \vec{N}\ \sin\theta = \vec{e} \times \vec{e}'$$

కనుక

$$\cos\theta = Ell' + F(lm' + l'm) + Gmm'$$

$\sin\theta = H(lm' - l'm)$ అవే P వద్ద గల దిశ (l, m) మరియు (l', m') ల మధ్య కోణము θ ఇవ్వబడినది. మరియు

5.1.4 $$\tan\theta = \frac{H(lm' - l'm)}{Ell' + F(lm' + l'm) + Gmm'}$$

దిక్ గుణకాల నిర్వచనం ప్రకారము దిశ (l, m) కు అభిముఖ దిశ $(-l, -m)$ అనేది స్పష్టమే కదా!

స్పర్శ తలముపై ఏదైనా సదిశ $\vec{a}$ కు స్పర్శీయ భాగము (λ, μ) అయితే, ఆ దిశలో దిక్ గుణకాలు

$$(l, m) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{E\lambda^2 + 2\,F\lambda\mu + G\mu^2}}, \frac{\mu}{\sqrt{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}}\right)\ \text{అవుతాయి.}$$

కనుక (λ, μ) లను దిక్ నిష్పత్తులు (Direction ratios) అంటాము.

5.2 ఉప సిద్ధాంతము 1 :

యూనిట్ స్పర్శ సదిశ

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 v'$ నుండి $l = u'$, $m = v'$ అని తీర్మానించుకొనవచ్చును.

v స్థిరమైనప్పుడు, $v' = 0$ కనుక $\vec{t} = \vec{r}_1 u'$ అవుతుంది. మరియు వర్గము చేసినచో

$$Eu'^2 = 1\ \text{కనుక}\ \vec{t} = \left(\frac{\vec{r}_1}{\sqrt{E}}\right)$$

అవుతుంది. అదే విధంగా వక్రము u = స్థిరము యొక్క యూనిట్ స్పర్శ సదిశ

$\vec{e}_2$, $\left(\frac{\vec{r}_2}{\sqrt{G}}\right)$ అవుతుంది.

వాటి దిక్ గుణకములను

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{\sqrt{E}} = \left(\frac{1}{\sqrt{E}}, 0\right),$$

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{\vec{r}_2}{\sqrt{G}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{G}}\right)$$ గా మనము వ్రాసుకొనవచ్చును.

5.3 ఉప సిద్ధాంతము 2 :

a) పరామితీయ వక్రములు u = స్థిరము, v = స్థిరముల మధ్యకోణము θ అయితే,

$$\cos\theta = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\sqrt{Ea}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

$$\sin\theta = |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{\sqrt{Ea}} = \frac{H}{\sqrt{EG}}$$

b) వక్రము v = స్థిరమునకు దిక్ గుణకము $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}, 0\right)$ దిశ (du, dv) కి మరియు $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}, 0\right)$ కి మధ్య కోణము α అయితే,

$$\cos\alpha = \vec{t} \cdot \vec{e}_1 = (\vec{r}_1 u^1 + \vec{r}_2 v^1) \cdot \frac{\vec{r}_1}{\sqrt{E}}$$

$$= \frac{(Eu^1 + Fv^1)}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\alpha = |\vec{t} \times \vec{e}_1| = \frac{|\vec{r}_2 \times \vec{r}_1|\, v^1}{\sqrt{E}} = \frac{Hv^1}{\sqrt{E}}$$

వీటిని (l, m) లలోకి మారిస్తే,

$$\cos\alpha = \frac{(El + FM)}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\alpha = \frac{Hm}{\sqrt{E}}$$

c) వక్రము $u =$ స్థిరమునకు దిక్ గుణకము $\left(0, \frac{1}{\sqrt{G}}\right)$ దిశ (du, dv) కి మరియు

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{G}}\right)$ కి మధ్య కోణము β అయితే,

$$\cos\beta = \vec{t}.\vec{e}_2 = (\vec{r}_1 u^1 + \vec{r}_2 v^1).\frac{\vec{r}_2}{\sqrt{G}} = \frac{FG' + GV'}{\sqrt{G}}$$

$$\sin\beta = |\vec{t} \times \vec{e}_2| = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \frac{u^1}{\sqrt{G}} = \frac{Hu^1}{\sqrt{G}}$$

(u^1, v^1) లను (l, m) లలోకి మార్చవచ్చును.

d) ఏదేని రెండు దిశలు (λ, μ) మరియు (λ^1, μ) ల మధ్యకోణము ।

$\vec{a} = \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$, $\vec{b} = \lambda^1\vec{r}_1 + \mu^1\vec{r}_2$ కనుక

$$|\vec{a}| = (E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2)^{1/2}$$

$$|\vec{b}| = \left(E\lambda^{12} + 2F\lambda'\mu' + G\mu'^2\right)^{1/2}$$

మరియు $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

లేదా $(\lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2).(\lambda'\vec{r}_1 + \mu'\vec{r}_2) = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G\mu\mu'}{(E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2)^{1/2}\left(E\lambda'^2 + 2F\lambda'\mu' + G\mu'^2\right)^{1/2}}$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{(\lambda\mu' - \lambda'\mu)H}{(E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2)^{1/2}\left(E\lambda'^2 + 2F\lambda'\mu' + G\mu'^2\right)^{1/2}}$$

మరియు

5.3.1 $$\tan\theta = \frac{(\lambda\mu' - \lambda^1\mu)H}{E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G\mu\mu'}$$

(5.1.4) మరియు (5.3.1) ల నుండి దిక్ గుణకాలని వాడినా, దిక్ నిష్పత్తులను వాడినా, $\tan\theta$ విలువ మారదని తెలుస్తున్నది.

e) రెండు దిశలు పరస్పర లంబాలు కావటానికి నియమము :

$\theta = 90^\circ$ అయినప్పుడు $\cos\theta = 0$ లేదా $\tan\theta = \infty$ అవుతాయి కనుక, (5.1.4) మరియు (5.3.1) ల నుండి

(5.3.2) $Ell' + F(lm' + l'm) + Gmm' = 0$

లేదా $E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G\mu\mu' = 0$ అవాలి.

పై ఫలితాలను

$$E\frac{l}{m}\cdot\frac{l'}{m'} + F\left(\frac{l}{m} + \frac{l'}{m'}\right) + G = 0$$

$$E\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'} + F\left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda'}{\mu'}\right) + G = 0$$ అని కూడా రాయవచ్చును.

f) తలము యొక్క స్పర్శ తలముపై దత్త దిశ (l, m) నకు లంబముగా నుండే దిశ యొక్క దిక్ గుణకములు :

దిశ (l, m) నకు లంబముగా ఉండే దిశ యొక్క దిక్ గుణకాలు (l', m') అనుకుంటే.

(5.3.2) నుండి,

$$Ell' + F(lm' + l'm) + Gmm' = 0$$

మరియు $H(lm' - l'm) = 1$ అని వస్తాయి.

వీటిలో మొదటి సమీకరణాన్ని

$$l'(El + Fm) + m'(Fl + Gm) = 0$$ గా రాయవచ్చును.

5.3.3 $$\therefore \frac{l'}{Fl + Gm} = \frac{m'}{-(El + Fm)} = k$$ (అనుకుందాము)

దీన్ని రెండో సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$H\{-l\,K(El + Fm) - K(Fl + Gm).\,m\} = 1$$

లేదా

$$HK(El^2 + 2Flm + Gm^2) = 1$$ అని వస్తుంది.

కాని (5.1.3[1]) దృష్ట్యా ఇది HK = 1 అనే ఫలితానికి దారి తీస్తుంది. మరియు (5.3.3) నుండి

$$l' = \frac{Fl + Gm}{H},\ m' = -\frac{(El + Fm)}{H}.$$

5.4 ఉప సిద్ధాంతము 3 : లంబ పరామితీయ వక్రములు :

P వద్ద $\vec{r}_1 . \vec{r}_2 = F = 0$ అయినప్పుడు, P గుండా వెళ్ళే పరామితీయ వక్రాలు లంబ వక్రాలవుతాయి.

ప్రతిబిందువు వద్ద, నియమము $\vec{r}_1 . \vec{r}_2 = F = 0$ తృప్తి పడినప్పుడు, పరామితీయ వక్రముల రెండు వ్యవస్థలు లంబముగా ఉంటాయి. తలముపైని పరామితీయ వక్రములు లంబ వక్రములగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు F = 0 పరామితీయ వక్రములు $u = u_0$, $v = v_0$ మధ్య కోణము θ అయినచో,

5.4.1 $\tan\theta = \frac{H}{F}$ అని మనకు తెలుసును.

ఆవశ్యక నియమము : పరామితీయ వక్రముల వ్యవస్థల లంబ వక్రములయితే, $\theta = \frac{\pi}{2}$ కనుక F = 0 అవుతుంది.

పర్యాప్త నియమము : F = 0 అనుకుందాము. (5.4.1) నుండి $\tan\theta \to \infty$ అని వస్తుంది. అంటే $\theta = \frac{\pi}{2}$ అవుతుంది. కాబట్టి పరామితీయ వక్రముల వ్యవస్థలు అభిలంబమగును.

5.5 ఉదాహరణ 1 : తలముపై దిక్ గుణకములను నిర్వచింపుము. రెండు ఇచ్చిన దిశలకు మధ్య నున్న సైన్, కొసైన్ కోణములకు సూత్రాలను కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 2 : పరామితీయ వక్రములు అభిలంబ వ్యవస్థలగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు F = 0 అని నిరూపించండి.

ఉదాహరణ 3 : పరామితీయ వక్రమూలు లంబ వక్రములయినప్పుడు, తలము మీది రేఖలు, u = స్థిరముచే ఇవ్వబడిన వక్రములను β అనే స్థిర కోణములో ఖండించితే, ఆ రేఖల అవకలన సమీకరణము $\frac{du}{dv} = \tan\beta\sqrt{\left(\frac{G}{E}\right)}$ అని నిరూపించండి.

సాధనము : పరామితీయ వక్రములు లంబ వక్రాలయితే (5.4) నుండి $F = 0$ అవుతుంది.

$$F = 0 \text{ నుండి } H^2 = EG - F^2 = EG \text{ లేదా } H = \sqrt{EG}$$

అని వస్తుంది. పరామితీయ వక్రము u = స్థిరమునకు దిక్ నిష్పత్తులు (0, 1) మరియు β కోణముతో వాలు వక్రము యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు (du, dv) అనుకుంటే,

$$\tan\beta = \frac{H(\lambda\mu^1 - \lambda^1\mu)}{E\lambda\lambda^1 + F(\lambda\mu^1 + \lambda^1\mu) + G\mu\mu^1}$$

$$= \frac{H\,du}{dv}$$

$$= \frac{\sqrt{EG}.\,du}{G\,dv}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{G}{E}}\tan\beta.$$

వక్రాల కుటుంబము – లంబ సంఛేదము :

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ అనే పరామితీయ చిత్రణ ద్వారా ఒక తలము S నిర్దిష్టమైనదని, సదిశా ప్రమేయము $\vec{r}$ యొక్క ప్రదేశముగా D మీద ఒక వాస్తవ మూల్య ప్రమేయమని అనుకొందాము. D లోని ప్రతి బిందువు వద్ద ϕ కు అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలనలు ఉన్నాయని, ఏ బిందువు వద్దనూ అవి రెండూ సున్న కావని అనుకొందాము. అప్పుడు వ్యాప్తిలోని ప్రతి c కు

5.6.1 $\phi(u, v) = c$

ను ధ్రువపరిచే (u, v) లలో ఏర్పడిన బిందువులు $\vec{r}(u, v)$ ఒక వక్రము α_c ని రూపొందిస్తాయి. c వివిధ విలువలకు ఈ విధంగా ఏర్పడే వక్రాల సరణిని S మీద ఒక వక్ర కుటుంబము అంటాము. సౌలభ్యం కోసం తలంమీది బిందువు $\vec{r}(u, v)$ ను (u, v) తో సూచిద్దాము. తలము S మీది బిందువు $P(u_0, v_0)$ గుండా పై కుటుంబములోని వక్రము α_c పోవటానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము, $c = \phi(u_0, v_0)$ అని స్పష్టమే, అంతేకాక (5.6.1) ను అవకలనం చేయగా వచ్చే.

5.6.2 $\phi_1 du + \phi_2 dv = 0$

నుండి P వద్ద α_c యొక్క స్పర్శరేఖ దిక్ నిష్పత్తులు $(-\phi_2, \phi_1)_{u = u_0, u = u_0}$ అని కూడా గమనించవచ్చును. (5.6.1) నిర్దిష్టం చేసే కుటుంబములోని వక్రాలు అవకలన సమీకరణము (5.6.2) యొక్క సాధనాలు అనేది స్పష్టమైన విషయము.

విపర్యంగా P, Q లకు ఏక కాలికంగా శూన్యం గాని అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలనులుంటే

5.6.3 $P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv = 0$ ఒక వక్రాల కుటుంబాన్ని నిర్వచిస్తుంది.

5.7 సిద్ధాంతము : దత్త తలము S మీది ఏ వక్ర కుటుంబానికైనా అనుగుణంగా క్రింది లక్షణాలుగల మరో వక్రకుటుంబం వ్యవస్థితము. "ఏ బిందువు వద్దనైనా రెండు కుటుంబాలకు చెందిన ఒక్కొక్క వక్రాన్ని తీసుకుంటే ఆ రెండు వక్రాలు పరస్పర లంబాలు". (ఈ సందర్భంలో రెండో కుటుంబాన్ని మొదటి దానికి లంబ సంఛేదాలు అంటారు).

ఉపపత్తి : $P\, du + Q\, dv = 0$ ద్వారా వక్రాల కుటుంబము నిర్దిష్టమైనదనుకొందాము.

అప్పుడు బిందువు (u, v) వద్ద స్పర్శరేఖా దిక్ నిష్పత్తులు (– Q, P) కనుక దీనికి లంబంగా ఉండే దిశకు దిక్ గుణకాలు (du, dv) లైతే, (5.3.2) నుంచి

$E(-Q)\, du + F(-Q\, du + P\, dv) + GP\, dv = 0$ కావలెను, అంటే

5.7.1 $(FP - EQ)\, du + (GP - FQ)\, dv = 0$

దీనిలో dy, dv ల గుణకాలు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు. అంతేగాక P, Q లు ఏక కాలికంగా శూన్యం కావు.

కనుకను, $EG - F^2 \neq 0$ అవటం వల్లను

$(FP - EQ)^2 + (GP - FQ)^2$ అనేది P, Q లలో నిశ్చిత ధనాత్మక వర్గరూపము.

అందువల్ల $FP - EQ$, $GP - FQ$ లు ఏక కాలికంగా సున్న కావు.

కనుక (5.7.1) ఒక వక్ర కుటుంబాన్ని సూచిస్తుంది.

5.8 వక్రముల కుటుంబము యొక్క సమాకలని రూపము **$f(u, v) = 0$ లో** ఇవ్వబడినప్పుడు :

$f(u, v) = 0$ ని అవకలనము చేస్తే,

$f_1\, du + f_2\, dv = 0$ అవుతుంది. లేదా $P = f_1$, $Q = f_2$ అనుకుంటే

5.8.1 $P\, du + Q\, dv = 0$ అవుతుంది (5.7.1), (5.8.1) ల నుండి

5.8.2 $(F f_1 - E f_2)\, du + (G f_1 - F f_2)\, dv = 0$ అని లభించును. ఇది కావలసిన వక్ర సంఛేదమును నిశ్చితము చేస్తుంది.

5.9 ఉదాహరణ 1 : ఒక తలము S పై దత్త వక్ర కుటుంబము, దాని లంబ సంఛేదాలు పరామితీయ వక్రాలయ్యేట్లు S కు పరామితులను ఎన్నుకోవటం ఎప్పుడూ సాధ్యమేనని నిరూపించుము.

సాధనము : అవకలన సమీకరణము $P\, du + Q\, dv = 0$ నిర్దేశించే వక్ర కుటుంబము $\phi = c$ అనుకుందాము. అప్పుడు $P = \lambda\phi_1$, $Q = \lambda\phi_2$ అయ్యేట్లు ప్రమేయము $\lambda \neq 0$ వ్యవస్థిత మవుతుంది. ఈ కుటుంబపు లంబ సంఛేదాల సమీకరణము $\chi = c$ అయితే (5.7.1) నుంచి $FP - EQ = \mu\, \psi_1$, $GP - FQ = \mu\, \psi_2$ అయ్యేటట్లు ప్రమేయము $\mu \neq 0$ ఉంటుంది. కనుక జాకోబియన్

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\lambda\mu} \cdot \begin{vmatrix} P & Q \\ FP - EQ & GP - FQ \end{vmatrix} = \frac{EQ^2 - 2F\, PQ + GP^2}{\lambda\mu}$$

లో $EQ^2 - 2F\, PQ + GP^2$ నిశ్చిత ధనాత్మక వర్గ రూపము కనక $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$. అందువల్ల పరామితులు u^1, v^1 లను

$u^1 = \phi(u, v)$

$v^1 = \psi(u, v)$

గా తీసుకుంటే, ఈ u', v' ల దృష్ట్యా పరామితీయ వక్రాలు $\phi = c$, $\psi = c$. ఇవి ఒక దానికొకటి లంబ సంఛేదాలు.

ఉదాహరణ 2 : పరామితీయ వక్రాల మధ్య కోణాన్ని సమద్వి ఖండన చేసే వక్రాలు

$Edu^2 - Gdv^2 = 0$ అని చూపించండి.

సాధనము : పరామితీయ వక్రాలు $v = c$, $u = c$ ల మధ్య కోణాన్ని సమద్వి ఖండన చేసే దిశ (du, dv) యొక్క దిక్ గుణకాలు (l, m) అనుకొందాము.

పరామితీయ వక్రాల స్పర్శరేఖా దిశలో గుణకాలు $\left(\frac{1}{\sqrt{E}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{G}}\right)$ కనుక

$$El.\frac{1}{\sqrt{E}} + F\left(l.\,0 + \frac{1}{\sqrt{E}}\,m\right) + G.\,m.\,0$$

$$= E.\,0.\,l + F\left(l.\,\frac{1}{\sqrt{G}} + 0.\,m\right) + G.\frac{m}{\sqrt{G}}$$

$$\therefore \frac{El + Fm}{\sqrt{E}} = \frac{Fl + Gm}{\sqrt{G}}$$

దీన్ని $(\sqrt{EG} - F)(\sqrt{E}\,l - \sqrt{G}.\,m) = 0$ గా వ్రాయవచ్చును.

దీని నుండి

$\sqrt{E}\,l - \sqrt{G}.\,m = 0$ అవుతుంది. లేదా $\sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv = 0$.

(du, dv) కి లంబదిశ $(\delta\mu, \delta\gamma)$ అయితే $\sqrt{E}\,\delta\mu + \sqrt{G}\,\delta\gamma = 0$

అంటే (du, dv), $(\delta\mu, \delta\gamma)$ లు

$E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$ యొక్క మూలాలు.

ఉదాహరణ 3 : ఋజురేఖ యొక్క స్క్రూ చలనము వలన జనియింపబడిన హెలికాయిడ్, అక్షమును α కోణముతో కలియును, జనక రేఖయొక్క లంబ సంఛేదములను కనుక్కోండి.

సాధనము : పరామితులు u, v లకు వాస్తవ విలువలు తీసుకొన్నప్పుడు తలం సమీకరణము

$\vec{r} = (u \sin \alpha \cos \varpi, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha + \alpha v)$ అవుతుంది.

$\therefore \vec{r}_1 = (\sin \alpha \cos v, \sin \alpha \sin v, \cos \alpha)$

$\vec{r}_2 = (-u \sin \alpha \sin v, u \sin \alpha \cos v, a)$

$E = 1, F = a \cos \alpha, G = u^2 \sin^2 \alpha + a^2$

వక్రాలు $v = c$ గా జనక రేఖలు ఇవ్వబడినవి. వాటి దిక్ నిష్పత్తులు (1, 0) గా ఉంటాయి. $Edu + Fdv = 0$ అయితే, దిశ (du, dv) (1, 0) కు లంబముగా ఉంటుంది.

అంటే $du + a \cos \alpha \, dv = 0$

కనుక $u + a \cos \alpha . v = K$ కుటుంబములోని వక్రాలు పరామితీయ వక్రాలైన $v = c$ కి లంబచ్ఛేదాలు.

ఉదాహరణ 4 : లంబహెలికాయిడ్ మీద $u \cos v = K$ అనే వక్రములకు అభిలంబముగా ఉండే వక్రముల కుటుంబము $(u^2 + a^2) \sin^2 u = c$ అని చూపించండి.

సాధనము : లంబ హెలికాయిడ్ యొక్క సమీకరణము

$\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, av)$

$\therefore \vec{r}_1 = (\cos v, \sin v, 0)$

$\vec{r}_2 = (-u \sin v, u \cos v, a)$

(5.9.1) $E = \vec{r}_1^{\,2} = 1, F = \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = 0, G = \vec{r}_2^{\,2} = u^2 + a^2$

$u \cos v = K$ ని అవకలనము చేస్తే

$\cos v \, \Delta u - u \sin v \, \Delta v = 0$

లేదా $\Delta u : \Delta v = u \sin v : \cos v$

స్పర్శరేఖీయ దిశ $(\Delta u, \Delta v)$ కి (du, dv)

అభిలంబమయితే, $F = 0$ కనుక

$$Eu \sin v \, du + G \cos v \, dv = 0$$ అవుతుంది. (5.9.1) నుండి

$$\frac{u}{u^2 + a^2} du + \frac{\cos v}{\sin v} dv = 0$$

సమాకలనముచేస్తే,

$$\log (u^2 + a^2) + \log \sin^2 v = \log c$$ అవుతుంది.

లేదా $(u^2 + a^2) \sin^2 v = c.$

ఉదాహరణ 5 : పరావలయజము $x^2 - y^2 = z$ మీద సమతలము $z =$ స్థిరరాశితో చేయబడ్డ ఛేదము యొక్క లంబ సంఛేదములను కనుక్కోండి.

సాధనము : తలము యొక్క పరామితీయ సమీకరణము

$$x = u, y = v, z = u^2 - v^2$$

$$\therefore \vec{r} = (u, v, u^2 - v^2)$$

$$\vec{r}_1 = (1, 0, 2u), \vec{r}_2 = (0, 1, -2v)$$

$$E = 1 + 4u^2, F = -4uv, G = 1 + 4v^2$$

సమతలము $Z =$ స్థిరరాశి చేత, చేయబడ్డ ఛేదము యొక్క సమీకరణము

(5.9.2) $u^2 - v^2 =$ స్థిరరాశి.

ఇది తలముమీది వక్రాల కుటుంబము యొక్క సమీకరణమవుతుంది. దీనిని అవకలనం చేస్తే,

$$udu - vdv = 0$$

లేదా $$\frac{du}{v} = \frac{dv}{u}$$

అంటే (5.9.2) చేత ఇవ్వబడ్డ వక్రాల కుటుంబములోని ఒక వక్రము మీది బిందువు (u, v) అయితే అక్కడి స్పర్శరేఖ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు (v, u) అవుతాయి. (v, u) కి లంబంగా ఉండే దిశ (du, dv) అనుకుంటే

$$E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G\mu\mu' = 0,$$

$(1 + 4u^2)\, v\, du - 4uv\,(vdv + udu) + (1 + 4v^2)\, udv = 0$ అవుతుంది. దీన్ని సూక్ష్మీకరిస్తే,

$$vdu + udv = 0$$

అని వస్తుంది. ఇది లంబ సంఛేదము యొక్క అవకలన సమీకరణము. దీనిని సమాకలనము చేస్తే uv = స్థిరము అని వస్తుంది. లేదా xy = స్థిరము. అంటే సంఛేదములు అతి పరావలయ స్థూపము xy = స్థిరము మరియు పరావలయజము యొక్క ఛేదము.

ఉదాహరణ 6 : $x = a \sin u \cos v,\ y = a \sin u \sin v,\ z = a \cos u$ చేత ఇవ్వబడ్డ గోళము మీది పరామితీయ వక్రములు లంబ కోణీయ వ్యవస్థను రూపొందిస్తాయని చూపండి. వక్రము v = స్థిరమును, కోణములు $\frac{\pi}{4}$ మరియు $\frac{3\pi}{4}$ లో కలియు రెండు వక్రాల కుటుంబాలను కూడా కనుక్కోండి.

సాధనము : $\vec{r} = (a \sin u \cos v,\ a \sin u \sin v,\ a \cos u)$

$$\vec{r}_1 = a\,(\cos u \cos v,\ \cos u \sin v,\ -\sin u)$$

$$\vec{r}_2 = a\,(-\sin u \sin v,\ \sin u \cos v,\ 0)$$

$$\therefore\ E = a^2,\ F = 0,\ G = a^2 \sin^2 u$$

$F = 0$ కనక గోళము మీది పరామితీయ వక్రాలు లంబ వక్రాలు.

వక్రము v = స్థిరము యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు $(1, 0)$ నకు, దిక్ నిష్పత్తులు (du, dv) నకు మధ్య కోణము $\frac{\pi}{4}$ అనుకుందాము.

$$\tan\theta = \frac{H(\lambda\mu' - \lambda'\mu)}{E\lambda\lambda' + F(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G\mu\mu'}$$

కనక

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{a^2 \sin u\,(dv)}{a^2\, du}$$

లేదా $\operatorname{cosec} u \, du = dv$

సమాకలనము చేస్తే,

$$\log \tan \frac{u}{2} = v + \log c = \log ce^{v}$$

$$\therefore \; e^{-v} \tan \frac{u}{2} = c$$

అంటే వక్రము v = స్థిరముతో కోణము $\frac{\pi}{4}$ చేసే వక్రాల కుటుంబము

$$e^{-v} \tan \frac{4}{2} = c \text{ అన్నమాట.}$$

కోణము $\frac{3\pi}{4}$ అయినప్పుడు,

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1 \text{ మరియు } \operatorname{cosec} u \, du = dv$$

సమాకలనము చేస్తే, $e^{v} \tan \frac{u}{2} = c$ అని వచ్చును.

ఇది వక్రములు v = స్థిరముతో కోణము $\frac{3\pi}{4}$ చేసే వక్రాల కుటుంబము యొక్క సమీకరణము.

5.10 రెండు వక్రాల కుటుంబాలు :

u, v లలో P, Q, R లు ఏక కాలికంగా శూన్యముగాని అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలవుతూ, $Q^2 > PR$ అయితే ద్విఘాత అవకలన సమీకరణము

5.10.1 $P\,du^2 + 2Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$ రెండు వక్రాల కుటుంబాలను సూచిస్తుంది.

విడివిడిగా యీ కుటుంబాల అవకలన సమీకరణాలు కావాలంటే

5.10.2 $P\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2Q\left(\frac{du}{dv}\right) + R = 0$ ను $\frac{du}{dv}$ సాధించి కనుగొనవచ్చును.

5.11 వక్రాల కుటుంబాలు లంబమగుటకు నియమము :

సమీకరణము (5.10.1) చే ఇవ్వబడ్డ రెండు వక్రాల కుటుంబాల దిక్ నిష్పత్తులు $(\lambda, \mu), (\lambda^1, \mu^1)$ అనుకుందాము. అప్పుడు $\frac{\lambda}{\mu}$ మరియు $\frac{\lambda^1}{\mu^1}$ సమీకరణము (5.10.2) నకు మూలాలు అవుతాయి.

$$\therefore \frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda'}{\mu'}=-\frac{2Q}{R},\ \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{R}{P}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^2=\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^2-4\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{4Q^2-4PR}{P^2}$$

రెండు దిశల మధ్యకోణము θ అనుకుంటే

$$\tan\theta=\frac{H(\lambda\mu'-\lambda'\mu)}{E\lambda\lambda^1+F(\lambda\mu'+\lambda'\mu)+G\mu\mu'}$$

$$=\frac{H\left(\frac{\lambda}{\mu}-\frac{\lambda'}{\mu'}\right)}{E\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}+F\left(\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda'}{\mu'}\right)+G}$$

$$=\frac{H.\frac{2}{P}(Q^2-PR)^{1/2}}{E.\left(\frac{R}{P}\right)+F\left(-\frac{2Q}{P}\right)+G}$$

$$\frac{2H(Q^2-PR)^{1/2}}{ER-2FQ+GP}$$

దిశలు లంబ దిశలు కావటానికి $\theta=90^\circ$ లేదా $\tan\theta=\infty$ అవ్వాలి. అంటే

5.11.1 $ER-2FQ+GP=0$

అవాలి. ఇది రెండు వక్రాల కుటుంబాలు లంబమగుటకు కావలసిన నియమము అవుతుంది.

5.12 ఉప సిద్ధాంతము : పరామితీయ వక్రాలు లంబ వక్రాలు అవటానికి కావలసిన నియమము :

$P=0$, $R=0$ అయితే, సమీకరణము (16.5.1) నుండి $du\,dv=0$ అని వస్తుంది. ఇది పరామితీయ వక్రాలు u = స్థిరము, v = స్థిరమును ఇస్తుంది. (5.11.1)లో $P=0$, $R=0$ అని తీసుకుంటే, $F=0$ అని వస్తుంది. పరామితీయ వక్రాలు లంబకోణీయములవటానికి $F=0$ కావాలనే విషయం మనం ముందు చూచినదే.

5.13 ఉదాహరణ : లంబ హెలికాయిడ్

$\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, ab)$

మీద వక్రాలు $du^2 - (u^2 + a^2)$ లంబకోణీయ వ్యవస్థను రూపొందిస్తాయని నిరూపించండి.

సాధనము : $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, av)$

కనుక $E = 1, F = 0, G = u^2 + a^2$

$P\,du^2 + 2Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$

ద్వారా ఇవ్వబడ్డ రెండు వక్రాల కుటుంబాల ప్రతి నిధులు లంబము కావటానికి

$ER - 2FQ + GP = 0$ అనే నియమము ఆవశ్యకమని మనకు తెలుసు.

వక్రాల సమీకరణము

$du^2 - (u^2 + a^2)\,dv^2 = 0$ ను (5.10.1) తో పోలిస్తే

$P = 1, Q = 0, R = -(u^2 + a^2)$ అని వస్తుంది.

వీటి నుండి

$ER - 2FQ + GP = (-1)(u^2 + a^2) + (u^2 + a^2).\,1 = 0$ అని వస్తుంది.

$\therefore\ du^2 (u^2 + a^2)\,dv^2 = 0$

చే ఇవ్వబడ్డ వక్రాలు లంబకోణీయ వక్రాల వ్యవస్థను రూపొందిస్తాయి.

అభిలంబ వక్రత

5.14 వాలు మరియు అభిలంబ ఛేదములు :

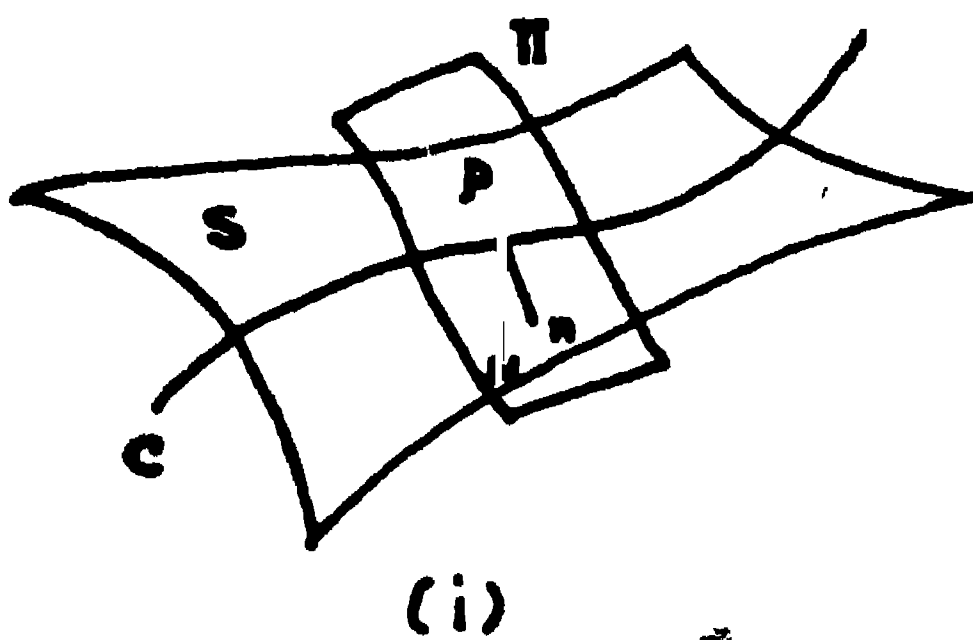
తలం S పైగల బిందువు P ద్వారా సమతలము π ని గీయుము. అప్పుడు π, సమతలము S ని, వక్రము C లో ఛేదిస్తుంది. దీనిని S యొక్క ఛేదము అంటాము. P వద్ద గల S యొక్క అభిలంబమును కలిగి వుండేటట్లుగా, సమతలం π ని గీసినట్లైతే, అప్పుడు వక్రము C ని అభిలంబ ఛేదమనియు లేనిచో C ని వాలు ఛేదమని పిలుస్తాము.

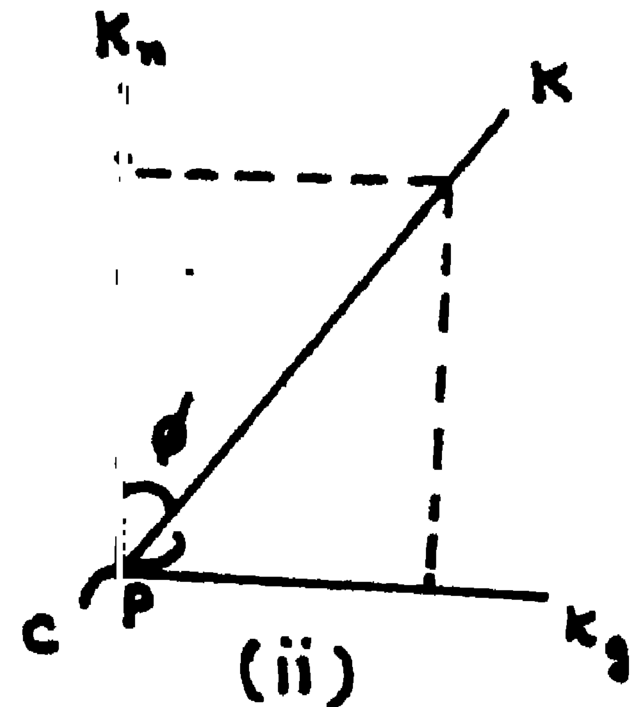
5.15 అభిలంబ వక్రతా సదిశ :

తలముపై బిందువు P నుండి పోయే ఒక వక్రము C అయితే (మరియు P వద్ద దాని వక్రత K అనుకుంటే) వక్ర సదిశ $\vec{K}, \frac{d\vec{t}}{ds}$ $(= k\vec{n})$ కు సమానము.

తలమునకు అభిలంబముగా నుండే $\vec{K}$ యొక్క అంశమును $\vec{K}_n$ గాను, తలమునకు స్పర్శ రేఖీయగా ఉండే అంశమును K_g గానూ విడదీస్తే,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{K} = \vec{K}_n + \vec{K}_g \text{ అవుతుంది.}$$





పటం 5.1

సదిశ $\vec{K}_n$ ని అభిలంబ వక్రతాసదిశ అంటాము. మరియు $\vec{K}_n = K_n\vec{N}$ గా కూడా వ్యక్తం చేయవచ్చును. దీనిలో K_n ను అభిలంబ వక్రత అంటాము. సదిశ $\vec{K}_n$ వక్రము C తో మాత్రమే నిశ్చితము చేయబడుతుంది. ఇది $\vec{t}$ లేదా $\vec{N}$ ల దిశపై ఆధారపడదు. కాని దాని గుర్తు $\vec{N}$ యొక్క దిశ మీద ఆధార పడుతుంది. సదిశ $\vec{K}_g$ ని స్పర్శ రేఖీయ వక్రతా సదిశగా గాని, జియోడెసిక్ వక్రతా సదిశగా కాని పిలిచెదము.

సమీకరణము $\vec{N}, \vec{t} = 0$ ని అవకలనము చేస్తే

$$\vec{N}.\frac{d\vec{t}}{ds}+\frac{d\vec{N}}{ds}.\vec{t}=0$$ అని వస్తుంది.

$$\therefore \vec{N}.\frac{d\vec{t}}{ds}=-\vec{t}.\frac{d\vec{N}}{ds}=-\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right).\left(\frac{d\vec{N}}{ds}\right)$$

$$=-\frac{(d\vec{r}).(d\vec{N})}{ds^2}$$

లేదా సమీకరణము (4.12.14) నుండి,

$$\textbf{5.15.1}\quad K_n=\frac{Ldu^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$$

సమీకరణము (5.15.1) అభిలంబ వక్రత K_n ని ఇస్తుంది.

P వద్ద గుణకములు E, F, G, L, M, N లు స్థిరములు కాబట్టి, P వద్ద దిశ $\frac{dv}{du}$ తో K_n పూర్తిగా నిశ్చితము గావించబడుచున్నది. అంటే, P గుండా పోయే అన్ని వక్రములకు స్పర్శరేఖ ఒకటే దిశకుంటే వాటికి ఒకటే అభిలంబ వక్రత సదిశ ఉంటుంది.

5.16 గమనికలు :

(i) $\vec{N}$ నుండి $\vec{n}$ కి ϕ కోణము మరియు $\vec{N}.\vec{t}=0, \vec{n}.\vec{t}=0$ కనక $\vec{N}$ నుండి సంస్పర్శక తలంకి కూడా ϕ కోణము కావలెను.

వాలు ఛేదము యొక్క వక్రత K కనక $K_n = |K\cos\phi|$ అవుతుంది. దీనిని మ్యూనర్ సిద్ధాంతమందురు.

(ii) K_n, తలము యొక్క అభిలంబముపై వక్రము యొక్క ప్రధాన అభిలంబము వెంటనున్న K పొడవుగల సదిశ యొక్క విక్షేపము.

బొమ్మ (i) లో తలము S నందలి వక్రము C యొక్క ప్రధాన అభిలంబము $\vec{n}$, తలము యొక్క అభిలంబము $\vec{N}$ తో ఏకీభవించటము లేదని చూపుచున్నది. వక్రము C జియోడెసిక్ (geodesic) వక్రము అయినప్పుడు మాత్రమే $\vec{N}$ తో ఏకీభవించును.

5.17 అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రత : వేరొక పద్ధతి :

తలము $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ని సమతలములతో ఛేదించుట వలన వచ్చు ఛేదములను తీసుకొందాము. వీటిలో తలముయొక్క అభిలంబము $\vec{N}$ ఉండేవి, మరియు $P(\vec{r})$ గుండా వెళ్ళే ఛేదములను మాత్రమే తీసుకొందాము. ఇటువంటి ఛేదములు సమతల వక్రములుగా ఉండును. P వద్ద ఉండే వీటి ప్రధాన అభిలంబముగా $\vec{n}$ తలము యొక్క అభిలంబము $\vec{N}$ కి సమాంతరముగా ఉంటాయి. $\vec{n}$ మరియు $\vec{N}$ ఒకటే దిశకున్నాయనుకొందాము.

$\vec{N}$ ఏ వైపుకు ఉన్నదో, ఆ పక్కకు వక్రము పుటాకారమైతే, ఛేదము యొక్క వక్రత, K_n ను ధనాత్మకమని అంటాము. ఫ్రెనెట్ మొదటి నియమము నుండి

$$\vec{t}' = \vec{r}'' = K_n \vec{N}$$

$$\Rightarrow K_n = \vec{N} . \vec{r}''$$

$$= \vec{N} . \left(\vec{r}_1 u'' + \vec{r}_2 v'' + \vec{r}_{11} u'^2 + 2 \vec{r}_{12} u' v' + \vec{r}_{22} v'^2 \right)$$

$$= L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2$$

$$\because \vec{N} . \vec{r}_1 = 0, \vec{N} . \vec{r}_2 = 0, \vec{N} . \vec{r}_{11} = L, \vec{N} . \vec{r}_{12} = M, \vec{N} . \vec{r}_{22} = N.$$

5.17.1 $$\therefore K_n = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

ఇది తలము యొక్క అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రతను, దిశ (du, dv) నందు ఇచ్చును. (దీనిని సంగ్రహముగా అభిలంబ వక్రత అంటారు). దీని వ్యుత్క్రమమును అభిలంబ వక్రతా వ్యాసార్ధ మంటాము. దీనిని S_n తో సూచిస్తాము.

5.18 గమనిక :

సమాసము (5.17.1) నిష్పత్తి $\frac{du}{dv}$ మీద మాత్రమే ఆధారపడును. P వద్ద ఒకదాని కొకటి అనుకొని ఉండే రెండు వక్రములకు దీని విలువ ఒకటే వుంటుంది. మరియు వీటికి ఒకటే

ప్రధాన అభిలంబము అంటే ఒకటే సంస్పర్శక సమతలముంటే, వాటికి P వద్ద ఒకటే వక్రత వుంటుంది.

కనక P వద్దగల తలముపై ఏదైనా వక్రము యొక్క వక్రత, P వద్ద వక్రము యొక్క సంస్పర్శక సమతలముతో తలమును ఛేదించినప్పుడు వచ్చిన ఛేదము యొక్క వక్రతా ఒకటేగా వుంటాయి. కావున తలము యొక్క సమతల ఛేదముల వక్రతలను మాత్రమే చదివితే సరిపోతుంది.

5.19 ఉదాహరణలు :

1. లంబ హెలికాయిడ్ x = u cos v, y = u sin v, z = cv యొక్క అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రతను కనుక్కోండి.

సాధన : u, v లు పరామితులుగా,

$$K_n = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

మరియు $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, cv)$

$$E = 1, G = u^2 + C^2, F = 0, L = 0, M = -\frac{C}{H}, N = 0$$

$$\therefore K_n = \frac{-2C\, du\, dv}{H\, [du^2 + (u^2 + c^2)\, dv^2]}.$$

2. ఏదైనా బిందువు (u, v) వద్ద తలము

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}, y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}, z = uv$$ యొక్క అభిలంబము, యూనిట్ సదిశ

$$\vec{N} = \frac{(u + v, v - u, -\sqrt{2})}{\sqrt{2}.\sqrt{(1 + u^2 + v^2)}} \text{ లేదా } \frac{(x, -y, -1)}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}}$$

తో ఇవ్వబడినదని చూపించుము. మరియు మూల బిందువు వద్ద దిశ (du, dv) నందు అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రతని కనుక్కొనుము.

సాధనము : $\vec{r} = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}, uv\right)$

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} v\right), \vec{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} u\right)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, 0), \vec{r}_{12} = (0, 0, 1), \vec{r}_{22} = (0, 0, 0)$$

$$E = \vec{r}_1^{\,2} = 1 + v^2, F = uv, G = \vec{r}_2^{\,2} = 1 + u^2$$

$$\therefore \; H^2 = EG - F^2 = (1+u^2)(1+v^2) - u^2 v^2 = 1 + u^2 + v^2$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{H} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} v\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} u\right)}{H}$$

$$= \frac{(u+v, v-u, -\sqrt{2})}{\sqrt{2}.\sqrt{1+u^2+v^2}} = \frac{(x, -y, -1)}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$$

మరియు $L = \vec{r}_{11}.\vec{N} = 0, M = \vec{r}_{12}.\vec{N} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$

$$N = \vec{r}_{22}.\vec{N} = 0$$

$$\therefore \; K_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

$$= \frac{-2\,du\,dv}{\sqrt{(1+u^2+v^2)}\,[(1+v^2)\,du^2 + 2\,uv\,du\,dv + (1+u^2)\,dv^2]}$$

3. రెండు తలముల ఛేదము యొక్క వక్రము నందలి ఏదైనా బిందువు P వద్ద వక్రత K అనుకుందాము. K_1, K_2 లు P వద్ద వక్రదిశలో తలము యొక్క అభిలంబ వక్రతలు. మరియు P వద్ద అభిలంబాల మధ్య కోణము α అయితే,

$$K^2 \sin^2 \alpha = K_1^{\,2} + K_2^{\,2} - 2K_1^{\,2} + K_2^{\,2} - 2K_1 K_2 \cos \alpha$$

అనే సంబంధములో K ఇవ్వబడునని చూపించుము.

సాధనము : తలాలు S_1 మరియు S_2 ల ఛేదకము వక్రము C. C మీద $P(\vec{r})$ ఒక బిందువు. $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ లు ఈ రెండు తలాలకి యూనిట్ అభిలంబాలు. α వీటి మధ్యకోణము కనక, $\vec{N_1}$

$$\vec{N}_1 . \vec{N}_2 = \cos \alpha,$$

$$\vec{t} . \vec{n} = 0, \vec{N}_1 . \vec{t} = 0, \vec{N}_2 . \vec{t} = 0 \text{ కనక}$$

సదిశలు $K\vec{n}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$ లు సతలీయమవుతాయి. కాబట్టి వీటిలో ఒక సదిశని మిగతా రెండిటి ఏక ఘాత సంయోగముగా రాయవచ్చును.

5.19.1 $\vec{r}'' = a\vec{N}_1 + b\vec{N}_2$ అనుకుందాము

$$\therefore \vec{r}'' . \vec{N}_1 = a + b\cos\theta$$

$$\vec{r}'' . \vec{N}_2 = a\cos\theta + b$$

లేదా $K_1 = a + b\cos\theta$

$$K_2 = a\cos\theta + b$$

a, b ల కోసం సాధిస్తే,

$$a = \frac{K_1 - K_2\cos\theta}{\sin^2\theta}, b = \frac{K_2 - K_1\cos\theta}{\sin^2\theta} \text{ అని వస్తుంది.}$$

వీటిని (5.19.1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$K\vec{n}\sin^2\theta = (K_1 - K_2\cos\theta)\vec{N}_1 + (K_2 - K_1\cos\theta)\vec{N}_2$$

లేదా $K^2\sin^4\theta = (K_1^2 + K_2^2)(1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta) - 2K_1K_2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$

$$\therefore K^2\sin^2\theta = K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2\cos\theta.$$

5.20 అభ్యాసము :

1. బిందువు (–1, 2, 3) వద్ద, సమతలము $x + y + z = 0$ మరియు తలము $2z = 2x^2 + y^2$ ల ఛేదము యొక్క వక్రతను కనుక్కోండి.

2. బిందువు (3, 2, 1) వద్ద, సమతలము $x + y + z = 6$ మరియు తలము

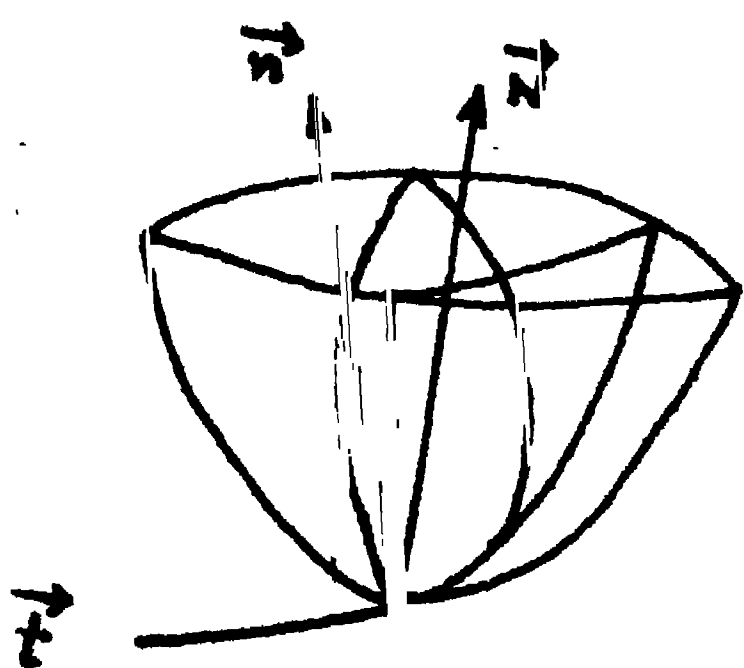
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20$ ల ఛేదము యొక్క వక్రతను కనుక్కోండి.

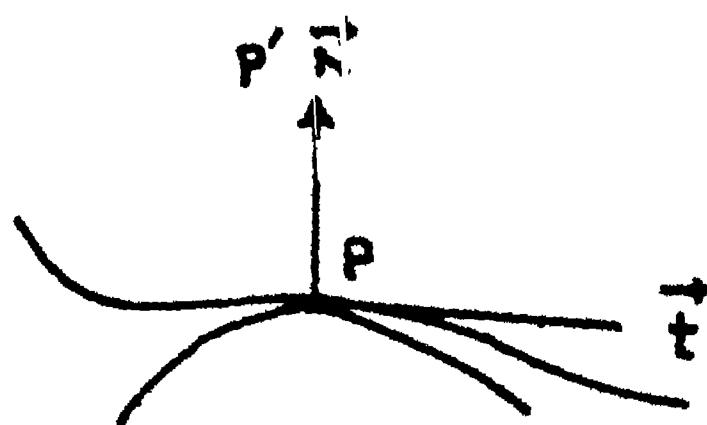
3 హెలికాయిడ్ $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = f(u) + cv$ యొక్క అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రతను కనుక్కోండి.

5.21 మ్యూనర్ సిద్ధాంతము :

ఒకే స్పర్శరేఖ గుండా వెళ్ళే వాలు ఛేదము మరియు అభిలంబ ఛేదముల యొక్క వక్రతలను K, K_n లతో సూచించినచో, ఛేదముల మధ్య కోణము θ అయినప్పుడు $K_n = k \cos \theta$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : P వద్ద స్పర్శతలమును, P గుండా వెళ్ళే తలము యొక్క వాలు ఛేదము రేఖ l నందు కలిపిందనుకుందాము. దాని ప్రధాన అభిలంబము $\vec{n}$ అనుకుందాము.





పటం 5.2

వాలు ఛేదముతో, రేఖ l గుండా వెళ్ళే అభిలంబ ఛేదము మరియు P వద్ద గల తలము యొక్క అభిలంబము, కోణము θ తో వాలివున్నాయనుకొందాము. అభిలంబ ఛేదమునకు $\vec{N}$, యూనిట్ అభిలంబ సదిశయితే, ఫ్రెనెట్ నియమము నుండి.

$$\cos = \vec{N}.\vec{n} = \vec{N}.\frac{\vec{r}''}{K} = \frac{K_n}{K}$$

$\therefore\ K_n = K \cos\theta$

జ్యామితీయంగా, $\vec{t}$ ఉన్న అన్ని సమతల ఛేదములకు నాటి వక్రతా వృత్తములు గోళము పీద ఉంటాయి.

$\theta = 0$ అయినప్పుడు, అంటే, సదిశ $\vec{n}$, $\vec{N}$ తో ఏకీభవించినప్పుడు $K_n = K$ అవుతుంది. అంటే P వద్ద వక్రము యొక్క ప్రధాన అభిలంబము $\vec{n}$ తలము యొక్క అభిలంబము $\vec{N}$ తో ఏకీభవించినప్పుడు బిందువు P వద్ద వక్రము యొక్క వక్రత K, వక్రము దిశలో P వద్ద అభిలంబ వక్రతకు సమానముగా నుండును.

ఉదాహరణ 1 : పరావలయజము $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ మరియు సమతలాలు $z = cy$ ల వక్రఛేదము యొక్క మూల బిందువు వద్ద వక్రత K ని కనుక్కోండి.

సాధనము : ఇచ్చిన వక్రముతో, ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ ఉన్న తలము యొక్క అభిలంబ ఛేదము, మూలబిందువువద్ద పరావలయము $z = \frac{x^2}{a^2}, y = 0$ అవుతుంది. మ్యూనర్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$K = \frac{2(1+c^2)^{1/2}}{a^2 c^2},\ C = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)$$ అని చూపించగలము.

అభ్యాసము

1. తలము యొక్క వాలు ఛేదము C యొక్క వక్రత K. C యొక్క దిశలో తలము యొక్క అభిలంబ వక్రత K_n. మరియు వాలు ఛేదము, అభిలంబ ఛేదముల మధ్యకోణము θ అయినప్పుడు, ఈ క్రింది నియమములను స్థాపించుము.

   (i) $\frac{\partial \vec{N}}{du} \times \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = \frac{LN - H^2}{\sqrt{EG - F^2}} \vec{N}$

   (ii) $K_n = K\cos\theta$

2. $S_n - S = 2 S_n \left(\sin^2 \frac{1}{2}\theta\right)$ అని నిరూపించుము.

6.

ప్రధాన దిశలు, ప్రధాన వక్రతలు మరియు వక్రతా రేఖలు

6.1 నిర్వచనాలు :

(i) **ప్రధాన ఛేదము :** తలము మీద గరిష్ఠ, కనిష్ఠ వక్రతగల అభిలంబ ఛేదమును తలము యొక్క ప్రధాన ఛేదమని అంటారు.

(ii) **ప్రధాన వక్రతలు :** ప్రధాన ఛేదముల గరిష్ఠ, కనిష్ఠ వక్రతలను ప్రధాన వక్రతలు అని అంటాము. వాటిని K_1 మరియు K_2 లతో గుర్తిస్తాము.

వాటికి అనురూపమైన వక్రతా వ్యాసార్ధములను ప్రధాన వక్రతా వ్యాసార్ధములంటాము. వాటిని S_1 మరియు S_2 లలో గుర్తిస్తాము.

(iii) **ప్రధాన దిశలు :** ప్రధాన ఛేదముల స్పర్శరేఖలను ప్రధాన దిశలని అంటాము. ఈ దిశలు పరస్పర లంబాలుగా ఉంటాయి.

(iv) **వక్రతా రేఖలు :** తలము మీది వక్రముపై ప్రతి బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సదిశ ఒక ప్రధాన దిశలో ఉంటే ఆ వక్రాన్ని వక్రతా రేఖ అంటాము.

(iii) నుండి తలము మీది ప్రతిబిందువు వద్ద రెండు ప్రధాన దిశలు, పరస్పర లంబాలుగా ఉంటాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి, తలము మీద వక్రతా రేఖల వ్యవస్థలు రెండు ఉంటాయి. మరియు తలముమీది ప్రతి బిందువు గుండా రెండు వ్యవస్థలనుండి వెరొక వక్రతారేఖ వెళతాయి. వక్రతారేఖల వ్యవస్థలు లంబంగా ఉంటాయి.

6.2 వక్రతా రేఖలు లేదా ప్రధాన దిశల అవకలన సమీకరణము :

సమీకరణము

6.2.1 $K = \frac{(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2)}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$

అభిలంబ వక్రత K_n (= K అనుకుంటే) ను ఇచ్చును.

$du = \lambda \cos \theta, dv = \lambda \sin \theta \ (0 \le \theta \le 2\pi)$ అనుకుంటే (6.2.1) నుండి

6.2.2 $K = \frac{L \cos^2 \theta + M \sin 2\theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + F \sin 2\theta + G \sin^2 \theta}$ అవుతుంది.

$EG - F^2 > 0$ కనక (6.2.2) సందరి హారము మాయమగుటకు వీలు లేదు. కనక $[0, 2\pi]$ లో K, θ యొక్క అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమవుతుంది. కావున K కు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు వుండవలెను. $du = \lambda, dv = \mu$ అనుకుంటే,

6.2,3 $K = \frac{L\lambda^2 + 2M\,\lambda\mu + N\,\mu^2}{E\,\lambda^2 + 2F\,\lambda\mu + G\mu^2} = \frac{f(\lambda, \mu)}{g(\lambda, \mu)}$ (అనుకుంటే) అవుతుంది.

అత్యంత విలువలకు ప్రమేయము $K(\lambda, \mu)$ యొక్క పాక్షిక వ్యుత్పన్నము మాయమగుట ఆవశ్యకము. కావున

$g.\,f_\lambda - f.\,g_\lambda = 0 ; g\,f_\mu - f\,g_\mu = 0$

6.2.4 $\therefore \frac{f}{g} = \frac{f_\lambda}{g_\lambda} = \frac{f_\mu}{g_\mu}$ (6.2.3) నుండి,

$f_\lambda = 2(L\lambda + M\mu) = 2(L\,du + M\,dv)$

$g_\lambda = 2(E\lambda + F\mu) = 2(E\,du + F\,dv)$

$f_\mu = 2(\mu\lambda + N\mu) = 2(M\,du + N\,dv)$

$g_\mu = 2(F\lambda + G\mu) = 2(F\,du + G\,dv)$

వీటిని (6.2.4) లో ప్రతిక్షేపణ చేస్తే,

6.2.5 $K_n = \frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv}$ అని వస్తుంది.

లేదా

6.2.6 $(EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du\, dv + (FN - GM)\, dv^2 = 0$ అవుతుంది.

దీని నిర్ధారక రూపము.

$$6.2.7 \quad \begin{vmatrix} L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

నిష్పత్తి $\left(\frac{dv}{du}\right)$ నకు ద్విఘాత సమీకరణము (6.2.6) గాని, (6.2.7) గాని రెండు విలువలకు, నిర్ధారించును. ఇవి స్పర్శతలము నందు రెండు దిశలను నిర్ధారించును. K_n నకు అత్యంత విలువలుగల దిశలు సమీకరణము (6.2.6) ను తృప్తి పరచవలెను. ఈ దిశలను తలము S నందలి బిందువు P వద్ద గల అభిలంబ వక్రత యొక్క ప్రధాన దిశలంటాము. లేదా P వద్ద S యొక్క ప్రధాన దిశలని సూక్ష్మంగా అంటాము. వాటికి అనురూపమైన అభిలంబ వక్రత K_n యొక్క విలువలను P వద్ద S యొక్క ప్రధాన వక్రతలని అంటాము. వాటిని K_1 మరియు K_2 లతో సూచిస్తాము.

6.3 ప్రధాన వక్రతలు :

అభిలంబ వక్రత K_n, సమీకరణము (6.2.5) చే గాని,

$(L - KE)\, du + (M - Kf)\, dv = 0$

$(M - KF)\, du + (N - KG)\, dv = 0$ లతో గాని ఇవ్వబడుచున్నది.

du, dv లను తొలగిస్తే,

$$6.3.1 \quad \begin{vmatrix} L - KE & M - KF \\ M - KF & N - KG \end{vmatrix} = 0$$ అవుతుంది. అంటే

$(EG - F^2)\, K^2 - (EN - 2FM + GL)\, K + (LN - M^2) = 0$ అవుతుంది. ఈ సమీకరణము యొక్క రెండు విలువలు తప్పక వాస్తవ విలువలు కావలెను. K యొక్క ఈ స్థావర విలువలు ప్రధాన వక్రతలు అవుతాయి.

6.4 వక్రతా రేఖాలు :

తలము S మీది ఏదైనా వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద దిశ, ప్రధాన దిశ అయితే, ఆ వక్రాన్ని S మీది వక్రతా రేఖ అంటాము. ఇది అవకలన సమీకరణము (6.2.6) నకు సాధన వక్రమవుతుంది.

6.5 ఉప సిద్ధాంతము :

(i) ఏ స్థిరబిందువు వద్దనైనా g_{ij} మరియు b_{ij} లు స్థిర రాశులు. కావున S మీది ప్రతి బిందువు గుండా $\left(\frac{dv}{du}\right)$ రెండు విలువలకు అనురూపముగా రెండు వక్రతా రేఖలు ఉంటాయి. మరియు ఈ రెండు వక్రతా రేఖలు లంబకోణీయతతో వుంటాయి.

దిశలు $P\,du^2 + Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$ లంబముగా నుండుటకు నియమము

$$ER - FQ + GP = 0$$

(6.2.6) నుండి,

$$ER - FQ + GP = E(FN - GM) - F(EN - GL) + G(EM - FL) = 0$$

కనక P గుండా వెళ్లే రెండు దిశలు లంబ కోణీయతలో ఛేదించుకుంటాయి.

(ii) సమీకరణము (6.2.6) నకు సమానమైన సమాసము

$$\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_1\right] du^2 + \left\{\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_2\right] + \left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_1\right]\right\}$$

$$du\,dv + \left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_2\right] dv^2 = 0$$

S మీద P వద్ద, $\vec{N}$ యూనిట్ అభిలంబము. g_{ij}, b_{ij} మరియు సంకలన సంకేత సంజలను ఉపయోగిస్తే దీనిని, $u = u^1$, $v = u^j$ అనుకుంటే,

$\left[\vec{N}, \vec{N}_i, \vec{r}_j\right] du^i du^j = 0$ అని రాయవచ్చును.

$H\left[\vec{N}, \vec{N}_j, \vec{r}_i\right] = \left[g_{1i} b_{2j} - g_{2i} b_{1i}\right]$ అని గుర్తుంచుకుంటే పై ఫలితము వెంటనే వచ్చును.

(iii) మాంగే రూపములో ఉన్నప్పుడు అంటే $z = f(x, y)$ గా ఇవ్వబడినప్పుడు, వక్రతా రేఖలు, ప్రధాన వక్రతలు క్రింది నిర్ధారకములో ఇవ్వబడును.

$$\begin{vmatrix} (1+p^2)\,dx + pq\,dy & pq\,dx + (1+q^2)\,dy \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix} = 0$$

అంటే

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

మరియు

$$\begin{vmatrix} HK(1+p^2) - r & H\,pq\,K - s \\ H\,pq\,K - s & H(1+q^2)K - t \end{vmatrix} = 0$$

$E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2, H^2 = 1 + p^2 + q^2$

$L = \frac{r}{H}, M = \frac{s}{H}, N = \frac{t}{H}$ కనుక, సమీకరణాలు

(6.2.7), (6.3.1) ల నుండి ఈ ఫలితాలను వెంటనే కనుక్కోవచ్చును.

6.6. ఉదాహరణలు :

(i) తలము $x = a(u + v), y = b(u - v), z = uv$ నకు ప్రధాన దిశలు మరియు ప్రధాన వక్రతలను కనుక్కోండి.

సాధన : $\vec{r} = [a(u + v), b(u - v), uv]$

$\vec{r}_1 = [a, b, v], \vec{r}_2 = [a, -b, u]$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (b(u+v), a(u-v), -2ab)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, 0), \vec{r}_{12} = (0, 0, 1), \vec{r}_{22} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{N} = \frac{(b(u+v), a(u-v), -2ab)}{H}$$

6.6.1 $\therefore E = a^2 + b^2 + v^2, F = a^2 - b^2 + uv, G = a^2 + b^2 + u^2$

$$L = \vec{N} . \vec{r}_{11} = 0, M = \vec{N} . \vec{r}_{12} = \frac{-2ab}{H}, N = 0$$

$$T^2 = -\frac{4a^2 b^2}{H^2}$$

ప్రధాన దిశలను (లేదా వక్రతా రేఖలను)

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$ నుండికనుక్కోవచ్చును.

(6.6.1) నుండి E, F, G, L, M, N విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ a^2 + b^2 + v^2 & a^2 - b^2 + uv & a^2 + b^2 + u^2 \\ 0 & \frac{-2ab}{H} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

అవుతుంది. లేదా,

$$(a^2 + b^2 + u^2)\, du^2 - (a^2 + b^2 + v^2)\, du^2 = 0$$

లేదా

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 + b^2 + u^2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{a^2 + b^2 + v^2}}$$

సమాకలనము చేస్తే,

$$\sin h^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \pm \sin h^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \text{స్థిరరాశి.}$$

$$H^4 K^2 - (GL + EN - 2\,FM)\,K + T^2 = 0$$

ప్రధాన వక్రతలను ఇస్తుంది. కనక ఇందులో

$$GL = 0,\ EN = 0,\ H^2 = (a^2 + b^2 + v^2)(a^2 + b^2 + u^2) - (a^2 - b^2 + uv^2)$$

ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$H^4 K^2 - 4abH\,(a^2 - b^2 + uv)\,K - 4a^2 b^2 = 0$$

వీటి మూలాలు ప్రధాన వక్రతాలను ఇస్తాయి.

(ii) తలము $Z = c\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ నకు ప్రధాన వక్రతలనిచ్చే సమీకరణము, వక్రతారేఖం యొక్క అవకలన సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన : తలము యొక్క పరామితీయ రూపము

$$\vec{r} = (u\cos\theta,\ u\sin\theta,\ c\theta)$$

$$\therefore\ E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + c^2,\ H^2 = u^2 + c^2,$$

$$L = 0,\ M = \frac{-c}{H},\ N = 0$$

ప్రధాన వక్రతలకి

$$\begin{vmatrix} KE - L & KF - M \\ KF - M & KG - N \end{vmatrix} = 0$$

లేదా

$$\begin{vmatrix} HK & c \\ c & H(u^2 + c^2)K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (u^2 + c^2)^2 K^2 - c^2 = 0$$

$$K = \pm \frac{c}{u^2 + c^2}$$

వక్రతా రేఖల అవకలన సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

దీనిలో E, F, G, L, M, N ల విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\begin{vmatrix} d\theta^2 & -du\,d\theta & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + c^2 \\ 0 & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

లేదా

$du^2 - (u^2 + c^2)\, d\theta^2 = 0$ అని వస్తుంది.

దీని నుండి $d\theta = \pm \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + c^2}}$

(iii) తలము $x = u \cos \theta, y = u \sin \theta, z = f(\theta)$

నకు వక్రతా రేఖలు జనక రేఖతో చేయు కోణము

$\tan^2 \phi + \dfrac{f}{f} \dfrac{u \tan \phi}{\sqrt{u^2 + f'^2}} - 1 = 0$ ద్వారా ఇవ్వబడునని నిరూపించుము.

సాధన : $\vec{r} = (u \cos \theta, u \sin \theta, f(\theta))$ కనుక

$$E = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = 1, F = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0, G = u^2 + f'^2,$$

$$H^2 = u^2 + f^2, L = \vec{r}_{11} \cdot \vec{N} = 0, M = \vec{r}_{12} \cdot \vec{N} = \frac{-f}{H}$$

$$N = \vec{r}_{22} \cdot \vec{N} = \frac{uf^{11}}{H}$$

వక్రతా రేఖలు

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

లేదా

$$\begin{vmatrix} d\theta^2 & -du\, d\theta & du \\ 1 & 0 & u^2+f'^2 \\ 0 & -\frac{f''}{H} & \frac{uf'}{H} \end{vmatrix} = 0$$

అంటే

6.6.2 $f'\left(u^2+f'^2\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + uf''\left(\frac{d\theta}{du}\right) - f' = 0$ ద్వారా ఇవ్వబడును.

స్పర్శ రేఖ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు

(dx, dy, dz), $dx = \cos\theta\, du - u \sin\theta\, du$,

$dy = \sin\theta\, du + u\cos\theta\, d\theta$, $dz = f'(\theta)\, d\theta$

వక్రతా రేఖలు జనక రేఖతో చేయు కోణము ϕ కనక అయితే,

$$\cos\phi = \frac{(dx\cos\theta + dy\sin\theta + 0.\, dz)}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}}$$

$$= \frac{du}{\sqrt{(du)^2 + u^2(d\theta)^2 + f'^2(d\theta)^2}}$$

వర్గము చేసి అధోముఖం చేస్తే,

$$\sec^2\phi = 1 + \left(u^2+f'^2\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2$$

లేదా $\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 = \frac{\tan^2\phi}{u^2+f'^2}$

దీనిని సమీకరణము (6.6.2) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\tan^2\phi + \frac{f''}{f'}\frac{u\tan\phi}{\sqrt{u^2+f'^2}} - 1 = 0$$

(iv) పరావలయజము $xy = ax$ యొక్క వక్రతా రేఖలు తలము

$\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \pm \sin h^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = A$, A ఒక స్థిరరాశి, పై ఉంటాయని నిరూపింపుము.

సాధన : $z = \frac{xy}{a}$ నుండి, $p = \frac{y}{a}, q = \frac{x}{a}, r = 0, s = \frac{1}{a}, t = 0$ అని వస్తాయి.

వక్రతా రేఖలు

$$\begin{matrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{matrix} = 0$$

లేదా

$$\begin{matrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+\frac{y^2}{a^2} & \frac{xy}{a^2} & 1+\frac{x^2}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{matrix} = 0$$

అంటే $(a^2 + x^2)(dy)^2 - (a^2 + y)^2 (dx)^2 = 0$ ద్వారా ఇవ్వబడుతాయి.

లేదా $\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0$

సమాకలనముచేస్తే,

$$\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \pm \sin h^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = A.$$

(v) పరావలయజము $xy = cz$ మరియు అతి పరావలయజము

$x^2 + y^2 - z^2 + c^2 = 0$ ల వక్ర ఛేదము యొక్క ఏదేని బిందువు వద్ద పరావలయజము యొక్క ప్రధాన వ్యాసార్ధములు $\frac{z^2(1 \pm \sqrt{2})}{c}$ అని చూపుము.

సాధన : $\vec{r} = (x, y, xy/c)$

$$\vec{r}_1 = (1, 0, y/c), \ \vec{r}_2 = (0, 1, x/c)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \left(\frac{-y}{c}, \frac{-x}{c}, 1\right)$$

$$\vec{r}_{11} = (0, 0, 0), \ \vec{r}_{12} = \left(0, 0, \frac{1}{c}\right), \ \vec{r}_{22} = (0, 0, 0)$$

$$\therefore\ E = 1 + \frac{y^2}{c^2}, F = \frac{xy}{c^2}, G = 1 + \frac{x^2}{c^2},$$

$$H^2 = 1 + \frac{(x^2 + y^2)}{c^2} = \frac{z^2}{c^2}, L = 0$$

$$M = \frac{1}{CH} = \frac{1}{z}, N = 0$$

ప్రధాన వక్రతలు

$$\begin{vmatrix} KE - L & KF - M \\ KF - M & KG - N \end{vmatrix} = 0$$

లేదా

$$\begin{vmatrix} k\,(c^2 + y^2) & \dfrac{k\,xyz - c^2}{z} \\ \dfrac{k\,xyz - c^2}{z} & k\,(c^2 + x^2) \end{vmatrix} = 0$$

దీనినుండి

$$z^2 k^2 (c^2 + x^2)(c^2 + y^2) = (k\,xyz - c^2)^2$$

లేదా $z^2 k^2 c^2 (x^2 + y^2 + z^2) = c^4 - 2\,c^2 k\,xyz$

లేదా $z^4 k^2 = c^2 - 2k\,xyz$ అని వస్తుంది.

$$k = \frac{1}{S} \text{ కనక,}$$

పై సమీకరణము

$$S^2 c^2 - 2c\,z^2 S - z^4 = 0 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\therefore\ S = z^2 \frac{(1 \pm \sqrt{2})}{c}.$$

(vi) పరావలయజము $2z = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ యొక్క మూలబిందువు వద్ద ప్రధాన వక్రతలను కనుగొనుము. మరియు ఛేదము $x = y$ యొక్క వక్రతను కూడా కనుగొనుము.

సాధన : సమీకరణము $2z = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ నుండి

$p = 5x + 2y, q = 2(x + y), r = 5, s = 2, t = 2$ మూలబిందువు (0, 0, 0) వద్ద వీటి విలువలు

$p = 0, q = 0, r = 5, s = 2, t = 2, H^2 = 1 + p^2 + q^2 = 1$ ప్రధాన వక్రతలు.

$$\begin{vmatrix} H(1+p^2)\,k - r & H\,pq\,k - s \\ H\,pq\,k - s & H(1+q^2)\,k - t \end{vmatrix} = 0$$

ద్వారా ఇవ్వబడుతాయి

అంటే $\begin{vmatrix} k-5 & -2 \\ -2 & k-2 \end{vmatrix} = 0$

లేదా $k^2 - 7k + 6 = 0$

$\Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 6.$

ఛేదము $x = y$ నకు పరావలయజము యొక్క సమీకరణము $2z = 11x^2$ లేదా $2h = 11x^2, z = h$ అవుతుంది. మూలబిందువు వద్ద న్యూటన్స్ సూత్రం నుండి

$$S = \lim \frac{r^2}{2h} = \lim \frac{(x^2 + y^2)}{2h} = \lim \frac{(x^2 + y^2)}{11x^2} = \frac{2}{11}$$

(vii) అతి పరావలయజము $2z = 7x^2 + 6xt - y^2$ నకు మూలబిందువు వద్ద, ప్రధాన వక్రతలు 8, − 2 అని చూపించుము. మరియు ప్రధాన ఛేదములు $x = zy, 3x = -y$ అని నిరూపించుము.

సాధన : $2z - 7x^2 + 6xy - y^2$ సమీకరణం నుంచి

$p = 7x + 3y, q = 3x - y, r = 7, s = 3, k = -1$

$\therefore$ మూల బిందువు వద్ద వీటి విలువలు $p = 0, q = 0, r = 7, s = 3, t = -1, H = 1$

$\therefore$ ప్రధాన వక్రతలను యిచ్చే సమీకరణం

$$\begin{vmatrix} k-7 & -3 \\ -3 & k+1 \end{vmatrix} = 0$$

లేదా $k^2 - 6k - 16 = 0$

$\Rightarrow k_1 - 8, k_2 = -2$

వక్రతా రేఖలను యిచ్చు సమీకరణం

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} dy^2 & -dx\,dy & dx^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3\,(dy)^2 + 8\,dy\,dx - 3\,(dx)^2 = 0$$

లేదా $3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0$ సమాకలనము చేస్తే,

$x = 3y,\ 3x = -y$ అని వస్తాయి.

(0, 0, 0) వద్ద సమాకలన స్థిరరాశులు సున్నాలు అవుతాయి కనుక)

.7 అభ్యాసము :

1. ప్రధాన వ్యాసార్ధాలు, వక్రతా రేఖలను క్రింది తలాలకి కనుక్కోండి.

i) $3z = ax^3 + by^3$

ii) $2z = ax^2 + 2hxy + by^2$

iii) $xyz = abc$

iv) $z^2\,(x^2 + y^2) = c^4$

v) $\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ uv)$

vi) $\vec{r} = (u\cos u - \sin u + v\cos u,\ v\sin u + \cos u + v\sin u,\ v)$

vii) $\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ f(u) + cu)$

viii) $\vec{r} = \dfrac{\{a\,(1+uv),\ b\,(u-v),\ c\,(1-uv)\}}{(u+v)}$

ix) $bx + ay = 2\,abu,\ bx - ay = 2\,abv,\ z = 2cuv.$

2. తలమునందు $\vec{r}$ బిందువు వద్ద యూనిట్ అభిలంబం $\vec{n}$ యొక్క మూల బిందువు వద్ద భ్రామకము $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{n}$ వక్రతా రేఖల అవకలన సమీకరణము $d\vec{m}.\, d\vec{n} = 0$ అని చూపండి.

3. వ్యాసార్ధము 'Q' గల వృత్తముతో జనితమైన హెలికాయిడ్ సమీకరణాన్ని జనక వృత్త తలము అక్షము ద్వారా పోతూ ఉంటే కనుక్కోండి. తలము యొక్క వక్రతా రేఖలను కూడా నిర్ణయించండి.

6.8 మరికొన్ని నిర్వచనములు :

మొదటి వక్రత :

తలము యొక్క ఏదైనా బిందువు వద్ద ప్రధాన వక్రతల మొత్తమును మొదటి వక్రత అని నిర్వచిస్తాము. దీనిని J తో సూచిస్తాము.

$$J = K_1 + K_2 = \frac{EN - 2\,FM + GL}{H^2}$$

దీనిని మధ్యమ వక్రతని కూడా అంటాము.

గాసియన్ వక్రత :

తలము యొక్క ఏదైనా బిందువు వద్ద ప్రధాన వక్రతల లబ్ధమును గాసియన్ వక్రతని నిర్వచిస్తాము. దీనిని K తో సూచిస్తాము.

$$K = K_1 . K_2 = \frac{T^2}{H^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

గాసియన్ వక్రతను, రెండవ వక్రతని, మొత్తము వక్రతని మరియు నిర్దిష్ట వక్రతని కూడా అంటాము.

కనిష్ట తలములు :

మొదటి వక్రత సున్న అయే తలములను కనిష్ట తలమంటారు. తలము కనిష్ట మగుటకు కావలసిన నియమము

$$EN - 2F + GL = 0$$

తలము మాంగే రూపములో ఉంటే, ఈ నియమము

$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$ అవుతుంది.

పాక్స్థాలి :

తలము మీది ఏ బిందువు వద్దనైనా అభిలంబ వక్రత, దిశ మీద ఆధారపడకుండా ఉంటే ఆ బిందువును నేవల్ బిందువు లేదా పాక్స్థాలి అని అంటారు.

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = \frac{(EG - F^2)^{1/2}}{(LN - M^2)^{1/2}} = \frac{H}{T}$$

అయినప్పుడు పైన చెప్పినట్లు జరుగుతుంది. ఎందుకంటే అప్పుడు,

$$K_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

ప్రధాన దిశలను నిర్ధారించలేదు. ఆ బిందువు వద్ద అన్ని దిశల్లోనూ ప్రధాన వక్రత సమానము.

6.9 పరామితీయ వక్రములుగా వక్రతా రేఖలు :

వక్రతా రేఖలు పరామితీయ వక్రములగుటకు నియమము $F = 0, M = 0$ ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తము.

ఉపపత్తి : నియమము ఆవశ్యకము.

వక్రతా రేఖలు పరామితీయ వక్రములనుకొందాము. పరామితీయ వక్రములు u = స్థిరము, v = స్థిరము ద్వారా ఇవ్వబడుతాయి కనుక వాటి సమిష్టి అవకలన సమీకరణము

6.9.1 $du\,dv = 0$ వక్రతా రేఖలు

6.9.2 $(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0$

ద్వారా ఇవ్వబడతాయి. (6.9.1), (6.9.2) ల నుండి

$EM - FL = 0,\ EN - GL \neq 0,\ FN - GM = 0$ అని వస్తుంది.

వీటిలో ఒకటవ, మూడవ సమీకరణలనుండి ఒకసారి F ను, మరొకసారి M ను తొలగిస్తే వరుసగా $(EN - GL) M = 0$, $(EN - GL) F = 0$ అని వస్తాయి.

$EN - GL \neq 0$ కనక $M = 0, F = 0$ కావలెను.

నియమము పర్యాప్తము.

$M = 0, F = 0$ అయితే వక్రతా రేఖల అవకలన సమీకరణము.

$(EN - GL)\, du\, dv = 0$ అవుతుంది. పాక్షిలి వద్ద మాత్రమే $\frac{L}{E} = \frac{N}{G}$ కనక, ఆ బిందువును తీసివేస్తే $EN - GL \neq 0$ అవుతుంది. కాబట్టి $du\, dv = 0$ అవుతుంది. ఇది పరామితీయ వక్రముల సమిష్టి అవకలన సమీకరణము.

6.10 ఆయిలర్ సిద్ధాంతము :

వక్రముపై బిందువు వద్ద (du, dv) దిక్ గుణకాలుగాగల దిశలో అభిలంబ వక్రత K_n, ప్రధాన వక్రతలు K_a, K_b లలో

$$K_n = K_a \cos^2 \psi + K_b \sin^2 \psi$$

అనే సూత్రము ద్వారా ఇవ్వబడుతుంది. (ఇక్కడ బిందువు వద్ద (du, dv) దిశ, ప్రధాన దిశ $dv = 0$ ల మధ్య కోణము ψ

ఉపపత్తి : ప్రధాన వక్రతలను పరామితీయ వక్రాలుగా తీసుకుంటే

$$F = 0, M = 0$$

అభిలంబ వక్రత

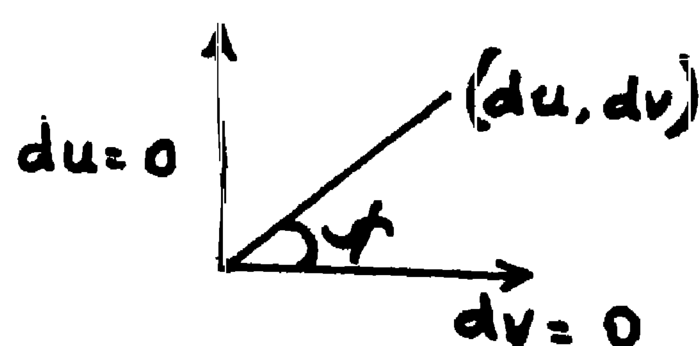
$$K_n = \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

$$= \frac{L\, du^2 + N\, dv^2}{E\, du^2 + G\, dv^2}$$

$$= L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$ అవుతుంది.

దిశ $dv = 0$ కు ప్రధాన వక్రత K_a అభిలంబ వక్రత కనుక $K_a = \frac{L}{E}$

దిశ $du = 0$ కు ప్రధాన వక్రత K_b అభిలంబ వక్రత కనుక $K_b = \frac{N}{G}$



పటం 6.1

ప్రధాన దిశ $dv = 0$ లో దిశ (du, dv) లో నున్న అభిలంబ ఛేదము ψ కోణము చేస్తే,

6.10 $\cos\psi = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \psi\right) = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}$

$$K_n = L\,u^{1^2} + N\,v^{1^2} = K_a\,(\sqrt{E}\,u^1)^2 + K_b\,(\sqrt{G}\,v^1)^2 = K_a\cos^2\psi + K_b\sin^2\psi$$

6.11 మ్యూపిన్ సిద్ధాంతము :

రెండు లంబ దిశలలో ఉన్న అభిలంబ వక్రతల మొత్తము స్థిరము. అది ప్రధాన వక్రతల మొత్తమునకుసమానము.

ఆయిలర్ సిద్ధాంతము నుండి

6.11.1 $K_{n_1} = K_a\cos^2\psi + K_b\sin^2\psi$

6.11.2 $K_{n_2} = K_a\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi + \psi\right) + K_b\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi + \psi\right)$

$$= K_a\sin^2\psi + K_b\cos^2\psi$$

(6.11.1), (6.11.2) లను కూడితే,

$$K_{n_1} + K_{n_2} = K_a + K_b = \text{స్థిరరాశి.}$$

సూచిక : తలమునందలి ఏ బిందువుగుండానైనా వెళ్లే వక్రము యొక్క వక్రతని, ఆయిలర్ సిద్ధాంతము మరియు మ్యూనర్ సిద్ధాంతముల నుండి పూర్తిగా తెలుసుకొనవచ్చును.

6.12 ఉదాహరణ 1 :

తలమునందలి m ఛేదములు ఒకదానితోనొకటి సమాన కోణములు $\frac{2\pi}{m}$ చేసుకుంటే, మరియు వాటి అభిలంబ వక్రతలు $K_1, K_2, \dots K_m$ అనుకుంటే,

$$K_1 + K_2 + \dots + K_m = m\mu \ (m > 2) \text{ అవవలెనని నిరూపింపుము.}$$

సాధన : ఆయిలర్ సిద్ధాంతము నుండి,

$$K_n = K_a \cos^2\theta + K_b \sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(K_a + K_b) + \frac{1}{2}(K_a - K_b)\cos 2\theta$$

$$= \mu + \lambda \cos 2\theta \text{ (అనుకొందాము)}$$

పైన ఇచ్చిన నియమముల వలన

$$K_1 = \mu + \lambda\cos 2\theta,\ K_2 = \mu + \lambda\cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right), \dots$$

$$K_m = \mu + \lambda\cos 2\left(\theta + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right)$$

$$\therefore \ \Sigma K_i = m\mu + \lambda\Sigma\cos\left(2\theta + \frac{4\pi i}{m}\right) i = 0, 1, \dots, m-1$$

$$= m\mu + \lambda\frac{\left\{\cos\left(2\theta + 2\pi\frac{(m-1)}{m}\right)\sin\left(m.\frac{4\pi}{m}\right)\right\}}{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}$$

$$= m\mu + 0 \ (m > 2).$$

6.13 ఉదాహరణ 2 : పరావలయజము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ యొక్క అభిలంబ వక్రతని మూలబిందువు వద్ద కనుగొనుము.

సాధన : మూలబిందువు వద్ద పరావలయజము మూలబిందువు వద్ద పరావలయజము యొక్క అభిలంబ ఛేదములు, సమతలములు $y = cx$, $c =$ స్థిరరాశిలచే చేయబడ్డ పరావలయజము యొక్క ఛేదములు. మూల బిందువు వద్ద ప్రధాన దిశలు x మరియు y అక్షముల యొక్క దిశలలో సమానము. అభిలంబ ఛేదమునకు, x – అక్షమునకు మధ్య కోణము θ అనుకుంటే, ఆయిలర్ సిద్ధాంతము నుండి,

$$K_n = 2\,(b^2 + a^2 c^2/a^2 b^2 (1 + c^2),\ c = \tan \phi.$$

6.14 అభ్యాసము

1. తలము నుండి పరామితీయ వక్రములు తలము యొక్క వక్రతా రేఖలగుటకు ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ అయే నియమమును కనుగొనుము.

2. ఒక ఉపరితలంలో ఏదైన బిందువువద్ద రెండు లంబ అభిలంబ ఛేదాల వ్యాసార్ధాలు S, S^1 లు అయితే $\frac{1}{S} + \frac{1}{S^1}$ స్థిరరాశి అని చూపండి.

3. ఒక ఉపరితలానికి ఒక వక్రదిశలో అభిలంబ వక్రత K అయితే, $K = K_1 \cos^2\theta + K_2 \sin^2\theta$ అని చూపండి. ఇక్కడ సంకేతాలు సాధారణంగా వచ్చే అర్థాలనే కలిగి యున్నాయి.

6.15 రాడ్‌రిగ్ సూత్రము :

ఒక తలము మీది వక్రము, వక్రతారేఖ అవటానికి నియమము $d\vec{N} + k\,d\vec{r} = 0$ ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ (K, వక్రతారేఖను $d\vec{r}$ దిశలో అభిలంబ వక్రత).

ఆవశ్యకత : తలము మీద (du, dv) వక్రతా రేఖ అనుకొందాము. బిందువు (u, v) వద్ద (du, dv) ఒక ప్రధాన దిశ అవుతుంది. K, ఒక ప్రధాన వక్రత అయితే, సమీకరణము (6.3.1) నుండి

$$(L - KE)\, du + (M - KF)\, dv = 0$$

$$(M - KF)\, du + (N - KG)\, dv = 0$$

లేదా $(L\, du + M\, dv) - K(E\, du + F\, dv) = 0$

$$(M\, du + N\, dv) - K\,(F\, du + u\, dv) = 0$$

వీటిలో $E = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1, F = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, G = \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2,$

$L = -\vec{N}_1 \cdot \vec{r}_1, M = -\vec{N}_2 \cdot \vec{r}_1 = -\vec{N}_1 \cdot \vec{r}_2, N = \vec{N}_2 \cdot \vec{r}_2$ లను ఉపయోగిస్తే,

$$\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{r}_1\, du + \vec{N}_2 \cdot \vec{r}_1\, dv\right) + K\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1\, du + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\, dv\right) = 0$$

$$\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{r}_2\, du + \vec{N}_2 \cdot \vec{r}_2\, dv\right) + K\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\, du + \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2\, dv\right) = 0$$

లేదా $\left(\vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv\right) \cdot \vec{r}_1 + K\left(\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv\right) \cdot \vec{r}_1 = 0$

$$\left(\vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv\right) \cdot \vec{r}_2 + K\left(\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv\right) \cdot \vec{r}_2 = 0$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv$$

$d\vec{N} = \vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv$ కనుక పై సమీకరణాలను

6.15.1 $\left(d\vec{N} + K\, d\vec{r}\right) \cdot \vec{r}_1 = 0$

6.15.2 $\left(d\vec{N} + K\, d\vec{r}\right) \cdot \vec{r}_2 = 0$ అని రాయగలము.

$\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ అవకలనం చేస్తే

$2\vec{N} \cdot d\vec{N} = 0$ వస్తుంది. అంటే $d\vec{N}, \vec{N}$ కి లంబంగా ఉంటుందన్నమాట. అంటే $d\vec{N}$ స్పర్శరేఖీయ సదిశ అవుతుంది.

కాబట్టి $d\vec{N} + K d\vec{r}$ కూడా స్పర్శ రేఖీయ సదిశ అవుతుంది.

$\therefore$ $d\vec{N} + K d\vec{r}$, $\vec{r}_1$ మరియు $\vec{r}_2$ లు ఉండే సమతలంలో ఉంటుంది. కనుక (6.15.1), (6.152) ల నుండి $d\vec{N} + K d\vec{r} = 0$ కావలెను.

విపర్యంగా

ఒక ప్రమేయము K నకు వక్రము వెంట $d\vec{N} + K d\vec{r} = 0$ అనుకుందాము. దీని నుండి మొదటి భాగంలోని సమీకరణలు (6.15.1), (6.15.2) నిజమవుతాయి. వీటి నుండి

$$(L - KE)\, du + (M - KF)\, dv = 0$$

$$(M - KF)\, du + (N - KG)\, dv = 0$$

వస్తాయి. వక్రము, వక్రతా రేఖ అవటానికి తలము మీద ప్రమేయము K, అభిలంబ వక్రతని చూపిస్తే సరిపోతుంది.

$d\vec{N} + K d\vec{r} = 0$ నుండి

$K d\vec{r} = - d\vec{N}$ అవుతుంది.

లేదా $K\left(\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv\right) = -\left(\vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv\right)$

రెండు పక్కల $\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv$ తో అదిశా లబ్దము చేస్తే,

$$K\left(\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv\right)^2 = \left(-\vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv\right) \cdot \left(\vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv\right)$$

అవుతుంది.

$$\Rightarrow K\,(E\, du^2 + 2F\, du.dv\; G\, dv^2) = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2$$

$$\therefore K \frac{L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2\,F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

పై సంబంధము బిందువు (u, v) వద్ద దిశ (du, dv) లో K అభిలంబ వక్రతని చూపుతోంది.

6.16 అభ్యాసము

1. ఒక ఉపరితలంపై ఏదైన బిందువు స్థితి సదిశ $\vec{r}$ ఆ బిందువు వద్ద యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\vec{N}$ అయితే ఏదైన వక్రము ఆ ఉపరితలంపై ఉండటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $d\vec{r}, d\vec{N}$ లు సమాంతరంగా ఉండటం అని చూపండి.
2. వక్రతా రేఖ యొక్క స్పర్శరేఖ యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు l_1, m_1, n_1 ఆ బిందువు వద్ద తలానికి అభిలంబ రేఖ దిక్ కోసైన్‌లు l, m, n లు అయితే, ఆ బిందువు వద్ద $\frac{dl}{l_1} = \frac{dm}{m_1} = \frac{dn}{n_1}$ అని చూపండి.

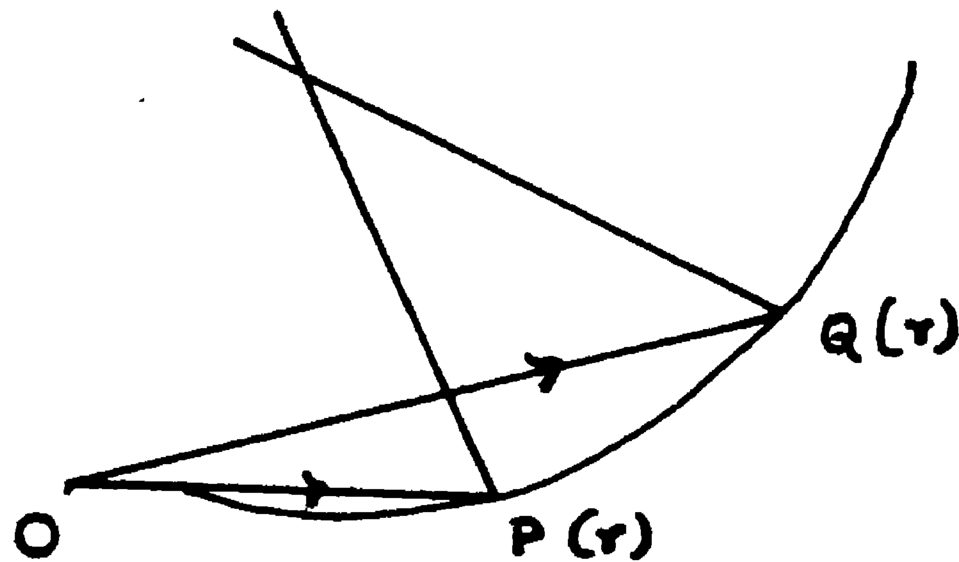
6.17 వక్రతా రేఖల ప్రాథమిక అభిలంబ ధర్మము :

తలము మీది వక్రము యొక్క వరుస బిందువుల వద్దగల అభిలంబాలు ఖండించుకొంటే, వక్రము తలముమీద వక్రతారేఖ అవుతుంది. ఇది ఆవశ్యకము, పర్యాప్తము.

ఉపపత్తి : తలము S మీద C ఒక వక్రము. C మీది $P(\vec{r})$, $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ లు వరుస బిందువులు. $\vec{n}, \vec{n} + d\vec{n}$ లు వీటివద్ద యూనిట్ అభిలంబ సదిశలు. P, Q ల వద్దగల అభిలంబాలు ఖండించుకున్నా యనుకుందాము. అప్పుడు $\vec{n}, \vec{n} + d\vec{n}, d\vec{r}$ ల అదిశాత్రి లబ్ధము సున్న కావలెను.

$$\therefore [\vec{n}, \vec{n} + d\vec{n}, d\vec{r}] = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{n}, d\vec{n}, d\vec{r}] = 0$$



పటం 6.2

ఈ నియమమునుండి,

$d\vec{n} = a\,d\vec{r} + b\,\vec{n}$ కావలెను.

6.17.1 $\therefore \vec{n}.d\vec{n} = a\vec{n}\quad d\vec{r} + \vec{b}\,\vec{n}.\vec{n}$

$\vec{n}.\vec{n} = 1$ కనుక $\vec{n}.d\vec{n} = 0$ మరియు $\vec{n}.d\vec{r} = 0$

(**6.17.1**) నుండి, $\vec{b} = 0$ అవుతుంది.

$\Rightarrow d\vec{n} = a\,d\vec{r}$

రాడ్ రిగ్ సూత్రము నుండి, C వక్రతారేఖ అవవలెను. విపర్యంగా, S మీద C ఒక వక్రతా రేఖ అనుకుందాము. $\vec{c}$ మీద వరుస బిందువులు $P(\vec{r})$, $Q(\vec{r}+d\vec{r})$ వీటి వద్ద $\vec{n}$, $\vec{n}+d\vec{n}$ లు యూనిట్ అభిలంబ సదిశలు.

$\Delta = [\vec{n}, \vec{n}+d\vec{n}, d\vec{r}]$ అనుకుంటే,

రాడ్ రిగ్ సూత్రము నుండి,

$\Delta = [\vec{n}, d\vec{n}, d\vec{r}] = [\vec{n}, -K\,d\vec{r}, d\vec{r}]$

$= -K[\vec{n}, d\vec{r}, d\vec{r}] = 0$

Δ సున్నా అవడం వలన, వక్రతా రేఖ యొక్క వరుస బిందువుల వద్ద అభిలంబాలు ఖండించు కుంటాయని వస్తుంది.

6.18 జోషిమస్తల్ సిద్ధాంతము :

రెండు తలముల వక్రతా ఛేదనము, ఆ రెండు తలముల మీద వక్రతా రేఖ అయితే, ఆ తలములు స్థిర కోణముతో ఖండించుకుంటాయి. విపర్యంగా, రెండు తలములు స్థిర కోణములో ఖండించుకున్నప్పుడు వాటి వక్రతా ఛేదనము ఒక తలము మీద వక్రతా రేఖ అయితే అది రెండవ తలము మీద కూడా వక్రతా రేఖ అవుతుంది.

ఉపపత్తి : తలములు S_1, S_2 లు వక్రము C లో ఖండించుకుంటాయనుకుందాము. C మీద $(\vec{r})$ ఒక బిందువు. దీనివద్ద C నకు $\vec{t}$ యూనిట్ స్పర్శరేఖ అనియు, రెండుతలము యూనిట్ అభిలంబ సదిశలు $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ అనుకుందాము. మరియు రెండు తలము మధ్యకోణము, రెండు అభిలంబాలకి మధ్యకోణము θ కి సమానమని మనకు తెలుసు. మరియు

6.18.1 $\cos\theta = \vec{N}_1 . \vec{N}_2$

తలము S_1 మీద C వక్రతా రేఖ అయినప్పుడు, రాడ్‌రిగ్ సూత్రమునుండి

$K d\vec{r} + d\vec{N}_1 = 0$ అవుతుంది.

లేదా $K\dfrac{d\vec{r}}{ds} + \dfrac{d\vec{N}_1}{ds} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{N}_1}{ds} = -K\vec{t}$$

దీనిని $\vec{N}_2$ తో అదిశా లబ్దము చేస్తే,

6.18.2 $\vec{N}_2 . \dfrac{d\vec{N}_1}{ds} = \vec{N}_2 . (-\vec{K}\,\vec{t}) = 0$

S_2 మీద కూడా C వక్రతా రేఖ కనుక, పై మాదిరిగా చేస్తే,

6.18.3 $\vec{N}_1 . \dfrac{d\vec{N}_2}{ds} = 0$

అని వస్తుంది. సమీకరణము (6.18.1) ని అవకలనము చేస్తే (6.18.2), (6.18.3) ల నుండి,

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta) = \frac{d}{ds}\left(\vec{N}_1 . \vec{N}_2\right)$$

$$= \vec{N}_1 . \frac{d\vec{N}_2}{ds} + \frac{d\vec{N}_1}{ds} . \vec{N}_2$$

= 0 అవుతుంది.

అంటే $\cos\theta$ = స్థిరమన్నమాట లేదా θ = స్థిరము.

విపర్యంగా రెండు తలములు θ అనే స్థిరకోణములో ఖండించుకుంటాయనుకొందాము. S_1 C వక్రతారేఖ అని తీసుకుందాము. S_2 మీద కూడా C వక్రతారేఖ అవుతుందని నిరూపిద్దాము

$\cos\theta$ = స్థిరము కాబట్టి

$\vec{N}_1 . \vec{N}_2$ = స్థిరము అవుతుంది.

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\vec{N}_1 . \vec{N}_2\right) = 0$ లేదా

6.18.4 $\vec{N}_1 . \frac{d\vec{N}_2}{ds} + \vec{N}_2 . \frac{d\vec{N}_1}{ds} = 0$

S_1 మీద c వక్రతా రేఖ కనుక (20.4.2) నుండి

6.18.5 $\vec{N}_2 . \frac{d\vec{N}_1}{ds} = 0$

(6.18.4) నుండి, $\vec{N}_1 . \frac{d\vec{N}_2}{ds} = 0$ అవుతుంది.

$\vec{N}_2 . \vec{N}_2 = 1$ కనుక,

6.18.6 $\vec{N}_2 . \frac{d\vec{N}_2}{ds} = 0$

(6.18.5), (6.18.6) ల నుండి, $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ లకు $\frac{d\vec{N}_2}{ds}$ లంబమని వస్తుంది.

అంటే $\frac{d\vec{N}_2}{ds}, \vec{t}$ సమాంతరంగా ఉంటాయి.

$\therefore \frac{d\vec{N}_2}{ds} = -K\vec{t} = -K\frac{d\vec{r}}{ds}$

లేదా $\frac{d\vec{N}_2}{ds} + K\frac{d\vec{r}}{ds} = 0$

లేదా $d\vec{N}_2 + K d\vec{r} = 0$

రాడ్‌రిగ్ సూత్రము నుండి S_2 మీద కూడా C వక్రతా రేఖని వస్తుంది.

కనిష్ఠ తలములు :

తలము మీద అన్ని బిందువుల వద్ద మొదటి వక్రత $J = K_a + K_b$ లేదా మధ్యమ వక్రత $\mu = \frac{1}{2}(K_a + K_b)$ సున్న అయితే, అట్టి తలాన్ని కనిష్ఠ తలమని అంటారు.

$K_n^2 (EG - F^2) - K_n (EN + LG - 2\,FM) + LN - M^2 = 0$ నకు K_a, K_b లు మూలములు కనుక,

$EN + LG - 2\,FM = 0$ అయితే,

$K_a + K_b = 0$ అవుతుంది.

తలము మాంగే రూపములో ఉంటే, ఈ నియమము

6.19 $(1 + q^2)\, r - 2\,pqs + (1 + p^2)\, t = 0$ అవుతుంది.

6.20 ఉదాహరణ :

1. తలము $e^z \cos x = \cos t$ కనిష్ఠ తలమని చూపించుము.

సాధన : రెండు పక్కాల సంవర్గం (log) తీసుకుంటే, $z = \log \cos y - \log \cos x$.

$p = \tan x,\ q = \tan y,\ r = \sec^2 x,\ s = 0,\ t = -\sec^2 y$

ఇవి సమీకరణము (6.19) ని తృప్తి పరుస్తాయి.

2. తలము $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = a \log \left\{u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\}$ కనిష్ఠ తలమని చూపించండి.

సాధన : $f(u) = a \log \left\{u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\}$ అని తీసుకుంటే,

$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = f(u)$ అవుతుంది.

$$\therefore\ f^{1} = a\frac{1}{u+\sqrt{u^2-a^2}}\left(1+\frac{2u}{2\sqrt{u^2-a^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$f^{11} = -\frac{au}{(u^2-a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\ E = 1+f^{1^2} = 1+\frac{a^2}{u^2-a^2} = \frac{u^2}{u^2-a^2}$$

$$F = 0$$

$$G = u^2$$

$$H^2 = u^2\left(1+f^{1^2}\right)$$

$$L = \frac{f^{11}u}{H},\ M = 0,\ N = \frac{u^2 f^1}{H}$$

తలము కనిష్ట తలము కావాలంటే

$EN - 2FM + GL = 0$ కావాలి.

E, F, G, L, M, N లను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$(1+f^{1^2})\frac{u^2 f^1}{u\sqrt{1+f^{1^2}}} - 2.0 + u^2\frac{u^2.\,f^{11}.\,u}{u\sqrt{1+f^{1^2}}} = 0$$ అని వస్తుంది.

∴ తలము కనిష్ట తలమవుతుంది.

6.21 సిద్ధాంతము :

ఏదైనా ఒక తలము యొక్క కనిష్ట వైశాల్యము సంవృత వక్రము ద్వారా పోతుంటే, అది తప్పక కనిష్ట తలము కావలెను. అంటే దాని మధ్యమ వక్రత సున్న కావలెను.

ఉపపత్తి : సంవృత వక్రముచే పరిబద్ధింపబడిన తలము $S(\vec{r} = \vec{r}(u, v))$ అనుకుందాము. [illegible] అభిలంబ దిశలో S నకు చిన్న స్థానభ్రంశము ε ఇస్తే మరియొక తలము $\bar{S}$ వస్తుంది. [illegible] ప్రమేయము ε. దాని వ్యుత్పన్నములు $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ లు చిన్నవిగా వుంటాయి. [illegible] అయినప్పుడు $\varepsilon_1 = 0(\varepsilon), \varepsilon_2 = 0(\varepsilon)$ అనుకుందాము. తలము $\bar{S}$ పైన ఏదైనా బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}'$ అనుకుంటే,

$\bar{r} = \vec{r} + \varepsilon \vec{N}$; $\vec{r}, \varepsilon, \vec{N}$ లు u, v ల ప్రమేయాలు.

$$\therefore \bar{r}_1 = \vec{r}_1 + \varepsilon \vec{N}_1 + \varepsilon_1 \vec{N}_1$$

$$\bar{r}_2 = \vec{r}_2 + \varepsilon \vec{N}_2 + \varepsilon_2 \vec{N}$$

$\bar{S}$ యొక్క E, F, G లను కనుక్కొందాము.

$$\bar{E} = \bar{r}_1^2 = \left(\vec{r}_1 + \varepsilon \vec{N}_1 + \varepsilon_1 \vec{N}\right)^2$$

$$= \vec{r}_1^2 + 2\varepsilon \vec{r}_1 . \vec{N}_1 + 0(\varepsilon^2) \left(\vec{N} . \vec{N}_1 = 0, \vec{N} . \vec{r}_1 = 0 \text{ కనుక}\right)$$

$$= E - 2\varepsilon L + 0(\varepsilon^2)$$

$$\bar{G} = \bar{r}_2^2 = G - 2\varepsilon \vec{N} + 0(\varepsilon^2)$$

$$\bar{F} = \bar{r}_1 . \bar{r}_2 = \left(\vec{r}_1 + \varepsilon \vec{N}_1 + \varepsilon_1 \vec{N}\right) . \left(\vec{r}_2 + \varepsilon \vec{N}_2 + \varepsilon_2 \vec{N}\right)$$

$$= F - 2\varepsilon M + 0(\varepsilon^2)$$

$$\bar{H}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = EG - F^2 - 2\varepsilon(EN - 2FM + GL)$$

$$= H^2 - 4\varepsilon H^2 . \frac{1}{2} \frac{(EN - 2FM + GL)}{H^2} + 0(\varepsilon^2)$$

$$= H^2 - 4\varepsilon H^2 \mu + 0(\varepsilon^2)$$

$$(\because \mu = EN + LG - 2FM/2H^2)$$

$$= H^2(1 - 4\varepsilon\mu + 0(\varepsilon^2))$$

$$\bar{H} = H(1 - 2\varepsilon\mu) + 0(\varepsilon^2)$$

తలాలు S మరియు $\bar{S}$ యొక్క వైశాల్యములు A మరియు $\bar{A}$ అనుకుందాము.

$$\therefore A = \int_S H\, du\, dv$$

$$\bar{A} = \int_S \bar{H}\, du\, dv = \int_S (H - 2\,\varepsilon\,\mu\, H)\, du\, dv + 0\,(\varepsilon^2)$$

$$= \int_S H\, du\, dv - \int_S 2\,\varepsilon\, H\, du\, dv + 0\,(\varepsilon^2)$$

$$= A - \int_S 2\,\varepsilon\,\mu\, H\, du\, dv + 0\,(\varepsilon^2)$$

$$\therefore\ \bar{A} - A = -\int_S 2\,\varepsilon\,\mu\, H\, du\, dv + 0\,(\varepsilon^2)$$

తలము S యొక్క వైశాల్యము కనిష్టము అయినప్పుడు, S యొక్క వైశాల్యము స్థావరము (stationary) కావలెను. అంటే $\mu = 0$ కావలెను. అంటే మధ్యమ వక్రత సున్న కావలెను. అంటే S కనిష్ట తలమన్నమాట.

6.22 దీర్ఘవృత్త, అతిపరావలయ మరియు పరావలయ బిందువులు :

ఏదైనా బిందువు P వద్ద ప్రధాన వక్రతలు సమీకరణము.

$$K_n^2\,(EG - F^2) - K_n\,(EN + LG - 2\,FM) + LN - M^2 = 0$$

ద్వారా ఇవ్వబడతాయి.

దీని మూలములను K_a, K_b లతో సూచిస్తాము.

$$\text{గాసియన్ వక్రత } K = K_a K_b = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{H^2}$$

దీర్ఘ వృత్త బిందువు :

తలము మీద బిందువు P వద్ద గాసియన్ వక్రత ధనాత్మకమయితే, ఆ బిందువును దీర్ఘ వృత్త బిందువంటాము. అంటే $LN - M^2 > 0$ అవాలి.

$$K = K_a K_b = \frac{LN - M^2}{H^2} > 0$$

కనుక రెండు ప్రధాన వక్రతలు K_a, K_b లు ఒకటే సంజ్ఞ కలిగి ఉంటాయి.

అతి పరావలయ బిందువు :

తలము మీది బిందువు P వద్ద గౌసియన్ వక్రత ఋణాత్మకమయితే అంటే, $LN - M^2 < 0$ అయితే ఆ బిందువును అతి పరావలయ బిందువంటారు.

$K = K_a K_b = \frac{LN - M^2}{H^2} < 0$ కనుక రెండు ప్రధాన వక్రతలు K_a, K_b లు వ్యత్యస్త సంజ్ఞలు కలిగి వుంటాయి.

పరావలయ బిందువు :

బిందువు P వద్ద గౌసియన్ వక్రత సున్న అయితే, అంటే $LN - M^2 = 0$ అయితే, తలము మీది ఆ బిందువును పరావలయ బిందువంటారు.

$K = K_a K_n = \frac{LN - M^2}{H^2} = 0$ కనుక ఒక్క ప్రధాన వక్రతైనా సున్న కావలెను.

6.23 సిన్‌క్లాస్టిక్, ఏంటిక్లాస్టిక్ తలములు (Synclastic, Anticlastic) :

రెండు ప్రధాన వక్రతలు ఒకటే సంజ్ఞకాని వ్యత్యస్త సంజ్ఞకాని కలిగి ఉన్న తలము యొక్క భాగములను సిన్‌క్లాస్టిక్ అనియు ఏంటిక్లాస్టిక్ అనియు అంటాము.

సిన్‌క్లాస్టిక్ : ప్రతిబిందువు దీర్ఘవృత్త బిందువు అయి వుండాలి. అంటే

$K = K_a K_b > 0$, అంటే K_a, K_b ఒకటే సంజ్ఞ కలిగి వుండాలి.

ఏంటిక్లాస్టిక్ : ప్రతిబిందువు అతిపరావలయ బిందువయి వుండాలి.

అంటే $K = K_a K_b < 0$ అంటే K_a, K_b లు వ్యత్యస్త సంజ్ఞ కలిగి వుంటాయి.

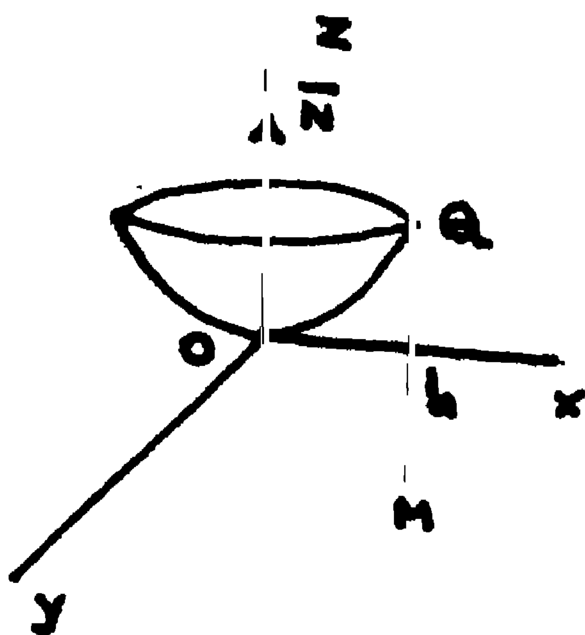
6.24 డ్యూపిన్స్ యిన్‌డికేట్రిక్స్ :

నిర్వచనము : ఏదైన బిందువు 'O' వద్దగల స్పర్శీయ తలమునకు సమాంతరముగా మరియు అవిశ్చితముగా దగ్గరగా ఉండు సమతలము చేత చేయబడ్డ తలము యొక్క ఛేదమును 'O' వద్ద డ్యూపిన్ యిండికేట్రిక్స్ అంటాము.

Dupin indicatrix యొక్క సమీకరణము :

తలము మీద 'O' ఒక బిందువనుకుందాము. O' కి చాలా దగ్గర Dupin Indicatrix మీద Q ఒక బిందువనుకుందాము. 'O' వద్దగల స్ప మీదికి Q నుండి లంబము h అనుకొందాము.

$$\therefore \; 2h = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$



పటం 6.3

పరామితీయ వక్రమును వక్రతా రేఖలుగా తీసుకుందాము.

$F = O$, $M = 0$ కనుక

$$2h = L\,du^2 + N\,dv^2$$

ప్రధాన వక్రతలు K_a, K_b లు ద్వారా ఇవ్వబడతాయి.

$$\therefore \; 2h = K_a E\,du^2 + K_b G\,du^2$$

పరామితీయ వక్రము v = స్థిరము యొక్క మెట్రిక్ $ds_1^{\,2} = E\,du^2$,

మరియు u = స్థిరము యొక్క మెట్రిక్ $ds_2^{\,2} = G\,dv^2$ కనుక,

$$2h = K_a\,ds_1^{\,2} + K_b\,ds_2^{\,2}$$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు 'O' ని మూలబిందువుగా తీసుకుందాము. ప్రధాన దిశల వెంబడి OX, OY లను, 'O' వద్ద తలము యొక్క అభిలంబము వెంబడి OZ ను తీసుకుందాము. Q యొక్క నిరూపకములను (x, y, z) లగా తీసుకుంటే,

$$x = ds_1, y = ds_2, z = h,$$

డ్యూపిన్ యిండికేట్రిక్స్ యొక్క సమీకరణము

$$z = h, x^2 K_a + y^2 K_b = 2h$$

అవుతుంది. 'O' వద్ద వక్రత యొక్క ప్రధాన వ్యాసార్ధములు R_a, R_b అనుకుంటే

$$R_a = \frac{1}{K_a}, R_b = \frac{1}{K_b} \text{ మరియు } z = h, \frac{x^2}{R_a} + \frac{y^2}{R_b} = 2h.$$

ఈ సమీకరణములు శాంకవ ఛేదమును వర్ణన చేస్తున్నాయి. కనుక డ్యూపిన్స్ యిండికేట్రిక్స్ శాంకవ ఛేదమని వస్తుంది.

బిందువు దీర్ఘ వృత్త బిందువయితే, K_a, K_b లు ఒకే సంజ్ఞ కలిగి వుంటాయి కనుక శాంకవము దీర్ఘ వృత్తమవుతుంది. దాని అర్ధ అక్షములు $(2h\ R_a)^{1/2}$, $(2h\ R_b)^{1/2}$ అవుతాయి. h యొక్క సంజ్ఞ మీద దీర్ఘ వృత్తము వాస్తవమా, కల్పితమా అన్నది ఆధారపడుతుంది.

'O' కనుక అతిపరావలయ బిందువయితే, K_a, K_b లు వ్యత్యస్త సంజ్ఞలు కలిగి వుంటాయి. కనక శాంకవము h సంజ్ఞ ప్రకారము సంయుగ్మ అతిపరావలయములలో ఒకటి అవుతుంది.

మూడవ మౌలిక రూపము :

మొదటి మౌలిక రూపము

$$I = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \ (= ds^2)$$

రెండవ మౌలిక రూపము

$$II = -d\vec{r} \cdot d\vec{N} = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 \ (= K_n\, ds^2)$$ అని మనకు తెలియును

మూడవ మౌలిక రూపము

$III = d\vec{N} . d\vec{N}$ అని నిర్వచింపబడినది.

$A = \vec{N}_1^2, B = \vec{N}_1 . \vec{N}_2, C = \vec{N}_2^2$ అనుకుంటే,

$III = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$.

6.25 మూడు మౌలిక రూపాలకి మధ్య సంబంధము :

K పూర్తి వక్రత, J మొదటి వక్రత అయితే, $K.I - J.II + III = 0$.

ఉపపత్తి : వక్రతా రేఖలు పరామితీయ వక్రాలను కొందాము. రెండు పరామితీయ వక్రాలని K_1, K_2 లు ప్రధాన వక్రతలను కొంటే, రాడ్‌రిగ్ సూత్రము నుండి,

6.25.1 $K_1 \vec{r}_1 + \vec{N} = 0$,

6.25.2 $K_2 \vec{r}_2 + \vec{N}_2 = 0$ వీటి నుండి మరియు $F = 0, M = 0$ నుండి,

6.25.3 $III = d\vec{N} . d\vec{N} = \left(\vec{N}_1 du + \vec{N}_2 dv\right)^2$

$= (K_1 \vec{r}_1 du + K_2 \vec{r}_2 dv)^2$ [(20.1.1), (20.1.2) నుండి]

$= K_1^2 E\,du^2 + K_2^2 G\,dv^2$

6.25.4 $I = E\,du^2 + G\,dv^2$

$II = L\,du^2 + N\,dv^2$

$L = -\vec{N}_1 . \vec{r}_1 = K_1 \vec{r}_1 . \vec{r}_1 = K_1 E$

$N = -\vec{N}_2 . \vec{r}_2 = K_2 \vec{r}_2 . \vec{r}_2 = K_2 G$

6.25.5 $\therefore II = K_1 E\,du^2 + K_2 G\,dv^2$

(6.25.3), (6.25.4), (6.25.5) ల నుండి $E\,du^2$, $G\,dv^2$ లను తొలిగిస్తే

$$\begin{vmatrix} III & K_1^2 & K_2^2 \\ I & 1 & 1 \\ II & K_1 & K_2 \end{vmatrix} = 0$$

లేదా $III\,(K_2 - K_1) - I\,K_1 K_2 (K_1 - K_2) + II\,(K_1^2 - K_2^2) = 0$ $(K_2 - K_1)$ తో విభజిస్తే,

$$III + I\,K_1 K_2 - II\,(K_1 + K_2) = 0$$

$$\Rightarrow KI - J\,II + III = 0$$

అభ్యాసము

1. హెలికాయిడ్ $x = u \cos \theta, y = u \sin \theta, z = f(u) + c\theta$ యొక్క అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రతను కనుక్కోండి.

2. హెలికాయిడ్ $x = u \cos \theta, y = u \sin \theta, z = c\theta$ మీద వక్రములు $du^2 - (u^2 + c^2)\,d\theta^2 = 0$ లంబ కోణీయ వ్యవస్థను రూపొందిస్తాయని చూపించండి.

3. $ds^2 = du^2 + (a^2 - u^2)\,dv^2$ అయినప్పుడు భ్రమణ పరితలము యొక్క సమీకరణను కనుక్కోండి.

4. తలము మీద ప్రతిబిందువు P వద్ద, ఏ దిశలోనైనా తలము యొక్క అభిలంబ వక్రత పరావలయజములో సమానముగా ఉండేటట్లు ఒక పరావలయజము ఉంటుందని చూపించండి.

5. తలము $xy = az$, a స్థిరరాశి, మీద వక్రతా రేఖలను $\sqrt{z^2 + x^2} \pm \sqrt{z^2 + y^2} =$ స్థిరరాశి రూపములో కనుక్కోండి.

6. తలము $xy = az$ మీద ప్రధాన వక్రతల సమీకరణము మరియు వక్రతారేఖల యొక్క అవకలన సమీకరణను కనుక్కోండి.

7. తలము $2z = ax^2 + by^2$ మీద సామీప్య బిందువులు (0, 0, 0) మరియు (α, β, γ) ల బిందువుల వద్దగల తలముమీది లంబాలు ఖండించుకుంటే, బిందువు (α, β, γ) మూలబిందువు (0, 0, 0) గుండాపోయే వక్రతా రేఖ మీద ఉంటుందని చూపించండి.

8. భ్రమణోపరితలము $x = u \cos \theta, y = u \sin \theta, z = f(u)$ మీద ఏదైనా బిందువు వద్ద రెండు ప్రధాన వక్రతలనిచ్చే సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

9. తలము $x = u \cos \theta, y = u \sin \theta, z = c \log (u + \sqrt{u^2 - c^2})$ నకు $P_1 = -P_2$ అని చూపించండి.

10. దీర్ఘ వృత్తజము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ యొక్క పాక్కిలిని కనుక్కోండి.

11. దీర్ఘవృత్తజము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ యొక్క పాక్కిలి P గుండా వెళ్ళే అభిలంబ ఛేదము యొక్క వక్రత $\frac{ac}{b^2}$ అని చూపించండి.

12. $x = y = z$ గా ఉండే బిందువుల వద్ద తలము $a^2 x^2 = z^2 (x^2 + y^2)$ యొక్క ప్రధాన వ్యాసార్థములను కనుక్కోండి.

13. దీర్ఘ వృత్తముమీది వక్రము మీద బిందువు P వద్ద PT స్పర్శరేఖ. స్పర్శరేఖ వెంబడి వక్రత స్థిరమయినప్పుడు. PT గుండా వెళ్ళే దీర్ఘవృత్తజము యొక్క అభిలంబ ఛేదము దీర్ఘ వృత్తజము యొక్క అభిలంబ ఛేదము దీర్ఘ వృత్తమని చూపించండి. మరియు దీని ఒక శీర్షము P వద్ద వుంటుందని చూపించండి.

14. శాంకవజము యొక్క వక్రతారేఖ వెంబడి రెండు ప్రధాన వ్యాసార్థములు ఏ విధంగా విచరణ మవుతాయో కనుక్కోండి.

15. మూలబిందువు వద్ద, తలము $2z = ax^2 + 2hxy + by^2$, సమతలము $lx + my - nz = 0$ ల ఛేదము యొక్క వక్రతా వ్యాసార్థము,

$(l^2 + m^2)^{3/2} (am^2 - 2hlm + bl^2)^{-1} (l^2 + m^2 + n^2)$ అని చూపించండి.

16. తలము $3z = ax^3 + by^3$, సమతలము $ax = by$, వక్రతా రేఖలో ఖండించుకుంటాయని చూపించండి.

17. తలము $2z = \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} + \ldots$ యొక్క మూల బిందువుఉ గుండా వెళ్ళే ఛేదముల వక్రతల యొక్క కేంద్రముల బిందు పథము
$(x^2 + y^2 + 3^2)\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p_1}\right) = z\ (x^2 + y^2)$ అని చూపించండి.

18. పరావలయజము $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ యొక్క ఏదైనా బిందువు వద్ద, ప్రధాన వ్యాసార్ధములు
$S^2 - H\rho(a + b + 2z) + ab\ H^4 = 0,\ H^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
లో ఇవ్వబడతాయని చూపంచండి.

19. మూలబిందువు వద్ద తలము
$2z = \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dyz)/3 + \ldots\ldots$
యొక్క వక్రతా రేఖల వక్రతను కనుక్కోండి.

20. పరావలయజము $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ మరియు (confocal) ఏకనాభీయ
$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 2z - \lambda$, బిందువు (x, y, z) వద్ద ఖండించుకుంటే ఆ బిందువు వద్ద వక్రత యొక్క ప్రధాన వ్యాసార్ధములు $H\lambda$ మరియు
$ab\frac{H^3}{\lambda},\ H^2 = \frac{[\lambda(a + b + 2z) - \lambda^2]}{ab}$ తో ఇవ్వబడతాయని చూపించండి.

21. $2z = \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} + \frac{(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)}{3} + \ldots$ వక్రతా రేఖల ఉపరితలము యొక్క సంస్పర్శతలము OX రేఖలో స్పృశిస్తే, ZOX తలములో ϕ కోణము చేస్తే,
$\tan\phi = \frac{p_1^2 p_2^2 b}{\rho_1 - \rho_2}$ అని చూపండి.

22. దీర్ఘవృత్తజము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ యొక్క వక్రతా రేఖల XY తలంపై విక్షేపాల అవకలన సమీకరణము $\beta b^2 xy\, dx^2 - (\beta b^2 x^2 + \alpha a^2 y^2 + a^2 b^2 \gamma)\, dx\, dy + 2a^2 xy\, dy^2 = 0$

7.
సంయుగ్మ దిశలు – అనంత స్పర్శ రేఖలు

7.1 సంయుగ్మ దిశలు :

తలముపై సామీప్య బిందువులైన P, Q ల వద్దనున్న స్పర్శీయ తలములు l అను రేఖలో ఛేదించుకుంటే, $Q \to P$ అయినప్పుడు, రేఖలు PQ మరియు l యొక్క వరమ (limiting) దిశలను P వద్ద సంయుగ్మ దిశలని అంటాము.

7.2 వైశ్లేషిక సమాసము :

S మీద $P(\vec{r})$ వద్ద, యూనిట్ అభిలంబ సదిశ $\vec{N}$ అనియు, $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ వద్ద $\left(\vec{N} + d\vec{N}\right)$ అని తీసుకుందాము. l యొక్క వరమ స్థితి వెంబడి సదిశ $D\vec{r}$ మరియు $\overrightarrow{PQ} = d\vec{r}$ అయినప్పుడు

$$d\vec{r} = (du, dv) = \vec{r}_1\, du + \vec{r}_2\, dv$$

$D\vec{r} = (Du, dv) = \vec{r}_1\, Du + \vec{r}_2\, Dv$ అవుతుంది.

$P(\vec{r})$ మరియు, $Q(\vec{r} + d\vec{r})$ ల స్పర్శీయ తలములపై రేఖ l ఉంటుంది కనుక,

$D\vec{r}.\vec{N} = 0, D\vec{r}.\left(\vec{N} + d\vec{N}\right) = 0$ అవుతుంది.

వీటి నుండి $D\vec{r}.d\vec{N} = 0$ అని వస్తుంది.

$$\therefore (\vec{r}_1\, Du + \vec{r}_2\, Dv).\left(\vec{N}_1\, du + \vec{N}_2\, dv\right) = 0$$

లేదా $L\, du\, Du + M\,(du\, Dv + dv\, Du) + N\, dv\, Dv = 0$

లేదా

7.2.1 $L\dfrac{du}{dv}\dfrac{Du}{Dv} + M\left(\dfrac{du}{dv} + \dfrac{Du}{Dv}\right) + N = 0$ $P(\vec{r})$ వద్ద రెండు దిశలు

$\left(\frac{du}{dv}\right), \left(\frac{Du}{Dv}\right)$ సంయుగ్మ దిశలగుటకు పై నియమమును పాటించవలెను.

7.3.1 ఉపసిద్ధాంతము – 1 :

$$D\vec{r}.\,d\vec{N} = d\vec{r}.\,D\vec{N} = L\,du\,Du + M\,(du\,Dv + dv\,Du) + N\,dv\,Dv = 0$$

కాబట్టి, సంయుగ్మ దిశల ధర్మము వ్యుత్క్రమము. అంటే $\frac{Du}{Dv}$ కి దిశ $\frac{du}{dv}$ సంయుగ్మమయితే $\frac{du}{dv}$ కి దిశ $\frac{Du}{Dv}$ సంయుగ్మమవుతుంది.

7.4 ఉపసిద్ధాంతము – 2 :

7.4.1 $P\,du^2 + Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$

అనే వర్గమునకు సాధనము ద్వారా ఇవ్వబడిన రెండు దిశలను పరిశీలిద్దాము.

పై సమీకరణ ద్వారా ఇవ్వబడిన రెండు దిశలు (du, dv), (Du, Dv) అనుకుంటే,

$\frac{du}{dv}, \frac{Du}{Dv}$ లు $P\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + Q\frac{du}{dv} + R = 0$ కి మూలాలు అవుతాయి.

$$\therefore \frac{du}{dv} + \frac{Du}{Dv} = -\frac{Q}{P}$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right) \cdot \left(\frac{Du}{Dv}\right) = \frac{R}{P}$$

(23.2.1) లో ప్రతిక్షేపణ చేస్తే,

7.4.2 $LR - MQ + NP = 0$

అని వస్తుంది. సమీకరణ (7.4.1) ద్వారా ఇవ్వబడిన దిశలు సంయుగ్మము అవటానికి ఇది కావలసిన నియమము.

7.5 ఉపసిద్ధాంతము – 3 : వక్రముల కుటుంబము $P\,du + G\,dv = 0$ ద్వారా ఇవ్వబడినప్పుడు, సంయుగ్మ కుటుంబము.

$(LQ - MP)\, Du + (MQ - NP)\, Dv = 0$ ద్వారా ఇవ్వబడుతుంది.

$\frac{du}{Q} = \frac{dv}{-P}$ ని ఉపయోగిస్తే (23.2.1) నుండి ఇది వెంటనే వచ్చును.

7.6 సంయుగ్మ దిశలు మరియు పరామితీయ వక్రములు :

పరామితీయ వక్రములకు సంయుగ్మ దిశలు ఉండటానికి $M = 0$ అనే నియమము ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ.

నియమము ఆవశ్యకము : పరామితీయ వక్రముల అవకలన సమీకరణము $du\, dv = 0$

దీనిని $P\, du^2 + Q\, du\, dv + R\, dv^2 = 0$ తో పోల్చి చూస్తే $P = 0, R = 0$ మరియు $Q = 1$ అని వస్తుంది. సమీకరణము (23.4.2) నుండి అవసర నియమముగా $M = 0$ అని వస్తుంది.

విపర్యంగా, $M = 0$ అయితే, పరామితీయ వక్రములకు $P = 0, R = 0, Q = 1$ కనుక, నియమము $LR - MQ + NP = 0$ నిజమవుతుంది.

7.7 ఉపసిద్ధాంతము : వక్రతా రేఖలకి సంయుగ్మ దిశలుంటాయి :

పరామితీయ వక్రములు వక్రతారేఖ లవటానికి నియమాలు $F = 0, M = 0$ ఆవశ్యకము, పర్యాప్తమూ మరియు $M = 0$ అయినప్పుడు పరామితీయ వక్రములు సంయుగ్మము కనక తలము మీద బిందువు వద్ద ప్రధాన దిశలు (వక్రతా రేఖలు) సంయుగ్మ దిశలు అవుతాయి. మరియు $F = 0$ కనక రెం ప్రధాన దిశలు అభిలంబముగా ఉంటాయి.

7.8 ఉదాహరణ – 1 :

తలముపైని ఏ బిందువు వద్దనైనా సంయుగ్మ దిశలలో అభిలంబ వక్రతల వ్యాసార్ధముల మొత్తము స్థిరమని నిరూపింపుము.

సాధన : వక్రతా రేఖలను పరామితీయ వక్రములుగా తీసుకొంటే, $F = 0, M = 0$ అవుతాయి. (du, dv) మరియు $(\delta u, \delta v)$ తలముపై రెండు దిశలుగా తీసుకొంటే, అవి సంయుగ్మ మయినప్పుడు $M = 0$ కనక (7.2.1) నుండి

7.8.1 $L\,du\,\delta u + N\,dv\,\delta v = 0$ అవుతుంది.

సంయుగ్మ దిశలలో అభిలంబ వక్రతల వ్యాసార్ధము S_1 మరియు S_2 అనుకొంటే,

$$S_1 = \frac{E\,du^2 + G\,dv^2}{L\,du^2 + N dv^2},\ S_2 = \frac{E\,\delta u^2 + G\,\delta v^2}{L\,\delta u^2 + N\,\delta v^2} \text{ కావలెను.}$$

(7.8.1) నుండి $\left(\frac{\delta u}{\delta v}\right) = -\left(\frac{N}{L}\right)\frac{dv}{du}$ కనుక

$$S_2 = \frac{EN^2\,dv^2 + GL^2\,du^2}{LN^2\,dv^2 + NL^2\,du^2} = \frac{EN^2\,dv^2 + GL^2\,du^2}{LN\,(L\,du^2 + N\,dv^2)}$$

మరియు

$$S_1 + S_2 = \frac{(E\,du^2 + G\,dv^2)\,LN + (EN^2\,dv^2 + GL^2\,du^2)}{LN\,(L\,du^2 + N\,dv^2)}$$

$$= \frac{NE + LG}{LN} \cdot \frac{L\,du^2 + N\,dv^2}{L\,du^2 + N\,dv^2} = \frac{EN + GL}{LN}$$

అవుతుంది. ఇది (du, dv) లపై ఆధారపడటంలేదు కనుక $S_1 + S_2$ స్థిరమవుతుంది.

ఉదాహరణ – 2 : తలము $y = u \sin v$, $z = f(u)$ మీద పరామితీయ వక్రాలు సంయుగ్మమని చూపించుము.

సాధన : తలము $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(u)$ నకు $M = 0$ కనుక పరామితీయ వక్రాలు సంయుగ్మమవుతాయి.

7.9 అనంత స్పర్శరేఖలు :

తలము మీద ప్రతిబిందువు వద్ద దిశ స్వయం సంయుగ్మముగా ఉండే వక్రమును అనంత స్పర్శరేఖ అంటారు. దిశ స్వయం సంయుగ్మము కనుక $\frac{du}{dv} = \frac{\delta u}{\delta v}$ కావలెను.

రెండు దిశలు (du, dv) మరియు $(\delta u, \delta v)$ లు సంయుగ్మ మవడానికి నియమము :

$$L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta v) + N\,dv\,\delta v = 0$$ లో దీనిని ఉపయోగిస్తే,

$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ లేదా $d\vec{N}.\,d\,\vec{r} = 0$ అని వస్తుంది.

బిందువు దీర్ఘవృత్త బిందువు కాని, పరావలయ బిందువు కాని, అతి పరావలయ బిందువుకాని అయినప్పుడు, అంటే $(LN - M^2)$ లేదా గాసియన్ వక్రత $K\left(=\dfrac{LN - M^2}{H^2}\right)$ ఋణాత్మకమయినప్పుడు లేదా సున్న అయినప్పుడు లేదా ధనాత్మకమయినప్పుడు రెండు అనంత స్పర్శరేఖలు వాస్తవము, మరియు విభిన్నము, ఏకీభవించుట లేదా కల్పితము అవుతాయి.

ఏ దిశలోనైనా అభిలంబ వక్రత $K_n = \dfrac{(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2)}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$ అనంత దిశలకి సున్న అవుతుంది.

7.9.1 వేరొక నిర్వచనము :

తలము మీద ప్రతిబిందువు వద్ద ఒక విచలన (inflessional) స్పర్శ రేఖను స్పర్శించునట్లు ఉండే వక్రమును అనంత స్పర్శరేఖని అంటారు.

7.10 అనంత స్పర్శరేఖకి ఉప అభిలంబము ఆ బిందువు వద్ద తలమునకు అభిలంబమవుతుందని చూపిద్దాము.

సంబంధము:

7.10.1 $\vec{N}.\,\vec{t} = 0$ ని అవకలనము చేస్తే,

$$\vec{N}^1.\,\vec{t} + \vec{N}.\,K\,\vec{n} = 0 \text{ లేదా,}$$

$$\left(\frac{d\,\vec{N}}{ds}\right).\left(\frac{d\,\vec{r}}{ds}\right) + K\vec{N}.\,\vec{n} = 0$$

అనంత స్పర్శరేఖ వెంబడి

$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{ds}\right).\left(\frac{d\,\vec{N}}{ds}\right) = 0 \text{ కనుక}$$

7.10.2 $\vec{N}.\vec{n} = 0$ నుండి $\vec{t} \times \vec{n}$ కి N సమాంతరముగా ఉంటుందని వస్తుంది. అంటే $\vec{N}$, $\vec{b}$ కి సమాంతరముగా ఉంటుంది.

7.11 ఉప సిద్ధాంతము :

పరామితీయ వక్రాలు అనంత స్పర్శరేఖలవటానికి $L = 0, N = 0, M \neq 0$ అనే నియమాలు ఆవశ్యము, పర్యాప్తమూ.

నియమము ఆవశ్యకము :

పరామితీయ వక్రముల అవకలన సమీకరణము $du\,dv = 0$. దీనిని

$L\,du^2 + 2\,M\,dudv + N\,dv^2 = 0$ తో పోలిస్తే, $L = 0, N = 0, M \neq 0$ అని వస్తుంది.

విపర్యంగా, $L = 0$, $N = 0$, $M \neq 0$ అయినప్పుడు, అనంత స్పర్శరేఖల సమీకరణము $du\,dv = 0$ అవుతుంది. ఇది పరామితీయ వక్రముల అవకలన సమీకరణము.

7.12 వక్రతా రేఖలు :

పరామితీయ వక్రములు అనంత స్పర్శరేఖలయినప్పుడు, $L = 0, N = 0, M \neq 0$ కనక వక్రతా రేఖల అవకలన సమీకరణము

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0,$$

$E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$ కి కుదించబడుతుంది.

7.12.1 ప్రధాన వక్రతలు :

సమీకరణము $(EG - F^2)\,K^2 - (EN + GL - 2FM)\,K + (LN - M^2) = 0$ ప్రధాన వక్రతలనిస్తుంది. లేదా

$$H^2\,K^2 + 2\,FMK - M^2 = 0$$

$\therefore$ గౌసియన్ వక్రత $K = -\dfrac{M^2}{H^2}$,

మొదటి వక్రత $J = -\dfrac{2\,FM}{H^2}$.

7.12.2 అనంత స్పర్శరేఖలు అభిలంబమవటానికి $EN - 2\,FM + GL = 0$ అనే నియమము ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తము.

సమీకరణము $P\,du^2 + 2Q\,du\,dv + R\,dv^2 = 0$ ఇచ్చే రెండు దిశలు అభిలంబ మవటానికి $ER - 2\,FQ + GP = 0$ అనే నియమము ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ అని మనకు తెలియును.

అనంత స్పర్శరేఖల అవకలన సమీకరణము $L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ ను వీనితో పోలిస్తే, అనంత స్పర్శరేఖలు అభిలంబ మవటానికి $EN - 2\,FM + GL = 0$ అనే నియమము ఆవశ్యకమూ, పర్యాప్తమూ అని వస్తుంది.

అంటే తలము కనిష్ట తలమయినప్పుడు లేదా మొదటి వక్రత సున్న అయినప్పుడు అనంత స్పర్శరేఖలు అభిలంబ మవుతాయి.

7.13 ఉదాహరణలు :

1. తలము $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv$ మీద పరామితి వక్రములు అనంత స్పర్శరేఖలని నిరూపించుము.

సాధన : పరామితి వక్రములు అనంత స్పర్శరెఖ లవటానికి నియమము, $L = 0,\ N = 0,\ M \neq 0$ తలము $\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ cv)$ నకు $L = 0,\ N = 0,\ M = -\dfrac{C}{H} \neq 0$ కనుక పై తలము మీద పరామితి వక్రములు అనంత స్పర్శరేఖ లవుతాయి.

2. భ్రమణోపరితలము

$$x = u\cos\theta,\ y = u\sin\theta,\ z = f(u),\ u = a\sin\phi,\ f(u) = a\left(\log\tan\frac{\phi}{2} + \cos\phi\right)$$

పైన అనంత స్పర్శరేఖలు $d\theta = \pm\dfrac{d\phi}{\sin\phi}$ తో ఇవ్వబడతాయని చూపుము.

సాధన : $\vec{r} = (u\cos\theta,\ u\sin\theta,\ f(u))$ కనుక

$$L = \frac{uf_{11}}{H}, M = 0, N = \frac{u^2 f_1}{H}$$

$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ లో వీటిని ప్రతిక్షేపిస్తే,

7.13.1 $f_{11}\,du^2 + uf_1\,d\theta^2 = 0$ అని వస్తుంది.

$u = a \sin \phi$ అయితే

$du = a \cos \phi\, d\phi$ మరియు

$f(u) = a\left(\log \tan \frac{\phi}{2} + \cos \phi\right)$ కనక,

$f_1 = \cot \phi$

$$f_{11} = -\frac{1}{a \cos \phi \sin^2 \phi}$$

7.13.1 నుండి

$$-\frac{1}{a \cos \phi \sin^2 \phi}\, a^2 \cos^2 \phi\, d\phi^2 + a \sin \phi \cot \phi\, d\theta^2 = 0$$

లేదా $-\frac{d\phi^2}{\sin^2 \phi} + d\theta^2 = 0$

$$\Rightarrow d\theta = \pm \frac{d\phi}{\sin \phi}.$$

3. తలము $Z = y \sin x$ మీద అనంత స్పర్శరేఖలను కనుక్కోండి.

సాధన : $Z = y \sin x$ కనుక,

$p = y \cos x,\ q = \sin x,\ r = -y \sin x,\ s = \cos x,\ t = 0$

$\therefore L = \frac{r}{H}, N = \frac{t}{H}, M = \frac{s}{H}, H^2 = 1 + p^2 + q^2$ అనంత స్పర్శ రేఖల సమీకరణము

$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$ లో వీటిని ప్రతిక్షేపిస్తే,

$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$ అవుతుంది.

లేదా $-y \sin x\, dx^2 + 2 \cos x\, dx\, dy \neq 0$

$\Rightarrow$ $[-y \sin x\, dx + 2 \cos x\, dy]\, dx = 0$

$\Rightarrow$ $dx = 0, -y \sin x\, dx + 2 \cos x\, dy = 0$

$dx = 0$ నుండి $x = c_1$ అని,

$-y \sin x\, dx + 2 \cos x\, dy = 0$ నుండి

$y^2 \cos x = c_2$ అని వస్తుంది.

7.14 అభ్యాసము :

1. పరావలయజము $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ మీద అనంత స్పర్శరేఖలు $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}$ స్థిరమని చూపించండి.

2. తలము $x = 3u(1 + v^2) - u^3$, $y = 3v(1 + u^2) - v^3$, $z = 3(u^2 - v^2)$ మీద అనంత స్పర్శరేఖలు $u \pm v$ = స్థిరమని చూపించండి.

3. తలము $u = c \cos h \frac{z}{a}$ యొక్క అనంత స్పర్శరేఖలు స్థూపము $2u = c(ae^{\theta} + a^{-1} e^{-\theta})$ మీద ఉంటాయని చూపించండి.

అనంత స్పర్శరేఖల వక్రత మరియు విమోటనము :

ఇంతవరకు అనంత స్పర్శరేఖ అంటే ఏమిటో చూసాము. వాటియొక్క కొన్ని ధర్మాలను కూడా వర్ణించాము. ఇప్పుడు అనంత స్పర్శరేఖల వక్రత మరియు విమోటనమును కనుక్కుందాము.

7.15 సిద్ధాంతము :

అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క ద్విపద అభిలంబము తలమునకు అభిలంబముగా ఉంటుంది. లేదా తలము మీద వక్రాంత అనంత స్పర్శరేఖ వెంట సంస్పర్శక సమతలము, స్పర్శీయ తలముతో ఏకీభవించును.

ఉపపత్తి : తలము యొక్క అభిలంబము $\vec{N}$ మరియు వక్రాంత అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క స్పర్శరేఖ అభిలంబముగా ఉంటాయి కనుక

7.15.1 $\vec{N}.\vec{t} = 0$'s' తో టి అవకలనము చేస్తే,

$$\vec{N}'.\vec{t} + \vec{N}.\vec{t}' = 0$$

లేదా

$$\frac{d\vec{N}}{ds}.\frac{d\vec{r}}{ds} + \vec{N}.K\vec{n} = 0$$

అనంత స్పర్శరేఖకి $\frac{d\vec{N}}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = 0$ కనక

$\vec{N}.K\vec{n} = 0$ అవుతుంది. $K \neq 0$ కనుక,

7.15.2 $\vec{N}.\vec{n} = 0$

(7.15.1), (7.15.2) ల నుండి $\vec{N}$, $\vec{t} \times \vec{n}$ కి అంటే $\vec{b}$ కి సమాంతరముగా వుంటుందని వస్తుంది. $\vec{b}$ యొక్క దిశ $\vec{N} = \vec{b}$ అయ్యేటట్లుగా తీసుకుంటే, వక్రాంత అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క ఏ బిందువు వద్దనైనా, ద్విపద అభిలంబము తలమునకు అభిలంబముగా ఉంటుంది.

అనంత స్పర్శరేఖ మీది ఏ బిందువు $\vec{r}$ వద్దనైనా సంస్పర్శకి సమతలము $\left(\vec{R} - \vec{r}\right)$ $\vec{b} = 0$ అనే సమీకరణములో ఇవ్వబడుతుంది. మరియు తలము మీది ఏ బిందువు వద్దనైనా స్పర్శీయ తలము $\left(\vec{R} - \vec{r}\right).\vec{N} = 0$ అనే సమీకరణములో ఇవ్వబడుతుంది. $\vec{N} = \vec{b}$ కనుక రెండు సమతలాలు ఏకీభవిస్తాయి.

విపర్యంగా, తలము మీది వక్రము యొక్క ప్రతిబిందువు వద్ద సంస్పర్శక తలము, స్పర్శీయ తలములో ఏకీభవిస్తోందని అనుకుందాము. అప్పుడు $\vec{N}$ మరియు $\vec{b}$ సమాంతరంగా ఉంటాయి.

$\vec{t}$. $\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{n} = \pm \vec{b} \cdot \vec{N} = 0$$

అంతేకాక $\vec{N}' \cdot \vec{t} = 0$ కనుక, 's' తో అవకలనము చేస్తే,

$$\vec{N}^1 \cdot \vec{t} + \vec{N} \cdot \vec{t}' = 0$$

లేదా $\dfrac{d\vec{N}}{ds} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{ds} + \vec{N} \cdot K\vec{n} = 0$

$\vec{N} \cdot \vec{n} = 0$ కనుక

$\dfrac{d\vec{N}}{ds} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{ds} = 0$ అని వస్తుంది.

అంటే తలము మీది వక్రము $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$ అనంత స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

7.16 తలము మీది అన్ని ఋజు రేఖలు అనంత స్పర్శరేఖలే :

$\vec{N} \cdot \vec{t} = 0$ ని అవకలనము చేస్తే,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \vec{N} \cdot K\vec{n} = 0$$

వక్రము ఋజు రేఖ అయితే $K = 0$ కనుక $\dfrac{d\vec{N}}{ds} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{ds} = 0$ అవుతుంది.

అంటే ఋజురేఖ అనంత స్పర్శరేఖని వస్తుంది.

7.17 అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క వక్రత మరియు Torsion :

అనంత స్పర్శరేఖకు $\vec{b} = \vec{N}$ కనుక, $\vec{b}' = \vec{N}'$ లేదా

$-\tau\vec{n} = \vec{N}'$ అని వస్తుంది. $\vec{n}$ తో అదిశా లబ్ధము తీసుకుంటే,

$$-\tau = \vec{N}' \cdot \vec{n} = \vec{N}' \cdot \left(\vec{b} \times \vec{t}\right)$$

$$= \vec{N}' \cdot \left(\vec{N} \times \vec{t}\right) = \left[\vec{N}', \vec{N}, \vec{t}\right]$$

$$\therefore \tau = \left[\vec{N}, \vec{N}', \vec{t}\right] = \left[\vec{N}, \vec{N}, \vec{r}'\right]$$

$\vec{t}' = K\vec{n}$ కనుక

$\vec{t}'.\vec{n} = K$ లేదా

$$K = \vec{t}'.\left(\vec{b} \times \vec{t}\right)$$

$$= \vec{t}'.\left(\vec{N} \times \vec{t}\right)$$

$$= \left[\vec{t}', \vec{N}, \vec{t}\right] = \left[\vec{N}, \vec{t}, \vec{t}'\right]$$

$$= \left[\vec{N}, \vec{r}', \vec{r}''\right]$$

7.18 బెల్ట్రామి ఎన్నెపెర్ సిద్ధాంతము :

ఏదైనా ఒక బిందువు ద్వారా వెళ్లే రెండు అనంత స్పర్శరేఖల torsion పరిమాణములో సమానము కాని వాటి సంజ్ఞ, ఒకేలాగ ఉండదు. మరియు వీటిలో ఏ ఒకటి తీసుకున్నా, దాని వర్గము గాసియన్ వక్రతకు ఋణాత్మకంగా ఉంటుంది. అంటే $\tau = \pm\sqrt{-K}$

ఉపపత్తి : $\tau = \left[\vec{N}, \vec{N}', \vec{r}'\right] = \vec{N}.\left(\vec{N}' \times \vec{r}'\right)$

$$\vec{N}' = \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$= \vec{N}_1 u' + \vec{N}_2 v'$$

మరియు $\vec{r}' = \vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 v'$

$$\therefore \vec{N}' \times \vec{r}' = \left(\vec{N}_1 u' + \vec{N}_2 v'\right) \times \left(\vec{r}_1 u' + \vec{r}_2 v'\right)$$

$$= \left(\vec{N}_1 \times \vec{r}_1\right) u'^2 + \left[\left(\vec{N}_1 \times \vec{r}_2\right) + \left(\vec{N}_2 \times \vec{r}_1\right)\right] u' v'$$

$$+ \left(\vec{N}_2 \times \vec{r}_2\right) v'^2$$

$$\therefore \tau = \vec{N} . \left(\vec{N}^1 \times \vec{r}^{\,\prime}\right)$$

$$= \left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}\right] u'^2 + \left\{\left[\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{r}_2\right] + \left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_1\right]\right\} u' v'$$

$$+ \left[\vec{N}, \vec{N}_2, \vec{r}_2\right] v'^2$$

$$= \frac{EM - FL}{H} u'^2 + \frac{EN - GL}{H} u' v' + \frac{FN - GM}{H} v'^2$$

అనంత స్పర్శరేఖలను పరామితి వక్రాలుగా తీసుకుంటే $L = 0, N = 0, M \neq 0$ కనుక

$$\tau = \frac{M}{H}\left(Eu'^2 - Gv'^2\right)$$

మొదటి మౌలిక రూపము నుండి,

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$$

అనంత స్పర్శరేఖలు పరామితి వక్రాలు కనుక అనంత స్పర్శరేఖ $u =$ స్థిరమునకు, $u' = 0$

$$\therefore \; Gv'^2 = 1 \text{ మరియు } \tau = \frac{M}{H}\left(-Gv'^2\right) = -\frac{M}{H}$$

అనంత స్పర్శరేఖ $v =$ స్థిరమునకు, $v' = 0$

$$\therefore \; Eu'^2 = 1 \text{ మరియు } \tau = \frac{M}{H}\left(Eu'^2\right) = \frac{M}{H}$$

గాసియన్ వక్రత $K = \frac{LN - M^2}{H^2} = -\frac{M^2}{H^2}$

$$\therefore \frac{M^2}{H^2} = -K \text{ లేదా } \tau = \pm\frac{M}{H} = \pm\sqrt{-K}.$$

7.19 వక్రత దిశ అనంత స్పర్శ దిశలను ఛేదించును :

పరామితి వక్రాలను అనంత స్పర్శరేఖలుగా తీసుకొంటే $\alpha = 0, N = 0, M \neq 0$ వక్రతా రేఖల అవకలన సమీకరణము

$$(EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du\, dv + (FN - GM)\, dv^2 = 0$$

$E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$ అవుతుంది.

పరామితి వక్రముల మధ్యకోణమును ఛేదించు దిశ $E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$ తో ఇవ్వబడునని మనకి తెలియును. కనుక వక్రత దిశ అనంత స్పర్శ దిశలను ఛేదించును.

7.20 ఉదాహరణలు:

1. అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క వక్రతను

$$\frac{\left[\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,'\right)\left(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,''\right) - \left(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,'\right)\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,''\right)\right]}{H}$$

గా రాయగలమని నిరూపించుము.

సాధన: అనంత స్పర్శరేఖ యొక్క వక్రత

$$K = \left[\vec{N}, \vec{r}\,', \vec{r}\,''\right] = \vec{N} \cdot \left(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right)$$

$$= \frac{\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right)}{H} \cdot \left(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right)$$

$$= \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,' & \vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,'' \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,' & \vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,'' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H}\left[\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,'\right)\left(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,''\right) - \left(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}\,'\right)\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}\,''\right)\right]$$

2. భ్రమణోపరితలము $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(u)$ మీద అనంత స్పర్శరేఖలు $f_{11}\,du^2 + u\,f_1\,dv^2 = 0$ అని చూపించండి. వాటి యొక్క Torsion విలువలు

$$\pm\sqrt{\frac{(-u^3 f_1 f_{11})}{u^2(1+f_1{}^2)}}$$ గా ఇవ్వబడతాయని చూపించండి.

సాధన: అనంత స్పర్శరేఖల సమీకరణము

7.20.1 $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$

$\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ కనుక

$$L = \frac{uf_{11}}{H}, M = 0, N = \frac{u^2 f_1}{H}$$

వీటిని (24.6.1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\frac{u f_{11}}{H} du^2 + \frac{u^2 f_1}{H} dv^2 = 0$$ అని వస్తుంది.

లేదా $f_{11} du^2 + u f_1 dv^2 = 0$

మరియు $\tau = \pm\sqrt{-K} = \sqrt{-\frac{(LN - M^2)}{H}} = \sqrt{-\frac{u^3 f_1 f_{11}}{u^2 (1 + f_1^{\,2})}}$

3. తలము $z = f(x, y)$ మీద అనంత స్పర్శరేఖలు $r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2 = 0$ తోను,

Torsion $\pm\sqrt{\frac{(s^2 - rt)}{(1 + p^2 + q^2)^2}}$ తోను ఇవ్వబడతాయని నిరూపించుము.

సాధన : తలము మాంగే రూపములో ఉన్నది కాబట్టి

$$L = \frac{r}{H}, N = \frac{t}{H}, M = \frac{s}{H}, H^2 = 1 + p^2 + q^2$$

$L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0$ లో వీటిని ప్రతిక్షేపిస్తే,

$M\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2 = 0$ మరియు గాసియన్ వక్రత

$$K = \frac{LN - M^2}{H^2} = \frac{rt - s^2}{H^4}$$

$$\tau = \pm\sqrt{-K} = \pm\frac{\sqrt{s^2 - rt}}{H^2} = \pm\sqrt{\frac{s^2 - rt}{(1 + p^2 + q^2)^2}}$$